# Preuve de la conjecture de Lieb–Thirring dans le cas des potentiels quadratiques strictement convexes.

R. de la Bretèche *

## § 1. Introduction

Soit $P_V(h) = -h^2\Delta + V$ l'opérateur de Schrödinger associé à un potentiel $V \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Nous supposons que

$$(1) \qquad \lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty$$

afin que le spectre de $P_V(h)$ dans $\mathbb{R}$ soit discret i.e. que les valeurs propres de $P_V(h)$ soient isolées et aient un ordre de multiplicité fini. On désigne par

$$\lambda(1,h) \leqslant \lambda(2,h) \leqslant \ldots \leqslant \lambda(i,h) \leqslant \ldots$$

ses valeurs propres avec leur multiplicité.

On note $C^0_+(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues à support inclus dans $\mathbb{R}^+$. Pour une large classe de fonction $\varphi$ de $C^0_+(\mathbb{R})$, on a, lorsque $h$ tend vers 0, l'équivalent

$$\mathrm{Tr}\big(\varphi(E - P_V(h))\big) \sim \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(E - \xi^2 - V(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

Ici, $\xi^2 = \langle\xi,\xi\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ lorsque $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et $n \geq 1$. Un problème intéressant et naturel est de déterminer pour quelle fonction $\varphi$ de $C^0_+(\mathbb{R})$ on a l'inégalité

$$(*) \quad \mathrm{Tr}\big(\varphi(E - P_V(h))\big) \leqslant \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(E - \xi^2 - V(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \qquad (\forall E \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^+).$$

(Des sous problèmes seraient obtenus en fixant $h$ ou $E$.) On note $\mathcal{S}_V$ l'ensemble des fonctions $\varphi$ de $C^0_+(\mathbb{R})$ vérifiant l'inégalité $(*)$ relative à un potentiel $V$.

* Ce travail a été partiellement effectué dans le cadre du programme TMR 96001 de la commission européenne : Équations aux dérivées partielles et applications à la mécanique quantique.

Mots clés : conjecture de Lieb–Thirring, valeurs propres d'opérateur
Classification AMS : 35P15, 35J10, 35P99.

On note $t_+ := \max\{t,\,0\}\quad (t\in\mathbb{R})$ et on désigne par $\varphi_\gamma$ la fonction définie par

$$\varphi_\gamma(t) = t_+^\gamma \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Lorsque $\varphi = \varphi_\gamma$ $\gamma \geq 1$ et $n \geq 3$, l'inégalité $(*)$ correspond à *la conjecture de Lieb–Thirring.* Dans la littérature, celle-ci s'énonce différemment. Nous allons maintenant introduire les notations relatives à cette conjecture. On remarque que, par un changement de variable, on a pour tout $E \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(E-\xi^2-V(x))_+^\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = L^C_{\gamma,n}\int_{\mathbb{R}^n}(E-V(x))_+^{\gamma+n/2}\,\mathrm{d}x$$

avec

$$L^C_{\gamma,n} := \Big((2\sqrt{\pi})^n\Gamma(\gamma+1+n/2)\Big)^{-1}\Gamma(\gamma+1).$$

Dans [LT76], Lieb et Thirring établissent que, pour $\gamma > \max(0, 1-n/2)$, il existe $C>0$ telle que, pour tout $V$ vérifiant $(E-V)_+ \in L^{\gamma+n/2}(\mathbb{R}^n)$, on ait la majoration

$$\mathrm{Tr}\big(\varphi_\gamma(E-P_V(h))\big) \leqslant Ch^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(E-V(x))_+^{\gamma+n/2}\,\mathrm{d}x \qquad (\forall E\in\mathbb{R}). \tag{2}$$

On note $L_{\gamma,n}$ la plus petite valeur de $C$ admissible et $L^{quad}_{\gamma,n}$ la plus petite valeur de $C$ admissible lorsque l'on se restreint à des potentiels quadratiques $V$ de la forme $V(x) = \sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2$ avec $k \in (\mathbb{R}^+_*)^n$. La conjecture de Lieb–Thirring est équivalente à $L_{\gamma,n} = L^C_{\gamma,n}$ pour $\gamma \geq 1$, $n \geq 3$. Pour les applications en physique de l'inégalité (2), nous renvoyons le lecteur à [LT76].

Il est clair que $L_{\gamma,n} \geq L^C_{\gamma,n}$. Dans [AL78], Aizenman et Lieb ont établi que la fonction $\gamma \mapsto L_{\gamma,n}/L^C_{\gamma,n}$ est décroissante. On note $\gamma_C(n)$ le borne inférieur de l'ensemble des $\gamma$ tels que $L_{\gamma,n} = L^C_{\gamma,n}$ quand elle existe. Le seul résultat définitif connu est $\gamma_C(1) = \frac{3}{2}$ (voir [LT76], [AL78] et [HR90-1]). En remarquant que $L^C_{\gamma,n} \leqslant L^{quad}_{\gamma,n} \leqslant L_{\gamma,n}$, Helffer et Robert ont montré dans [HR90-2] que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour $\gamma<1$ on a $L^{quad}_{\gamma,n} > L^C_{\gamma,n}$ et, par conséquent, $\gamma_C(n) \geq 1$ pour tout $n \geq 1$.

Le résultat principal de ce travail permet d'affirmer que $L^{quad}_{\gamma,n} = L^C_{\gamma,n}$ pour tout $\gamma \geq 1$ et $n\in\mathbb{N}$. Lorsque $V(x) = \sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2$ avec $k\in(\mathbb{R}^+_*)^n$, les valeurs propres de $P_V(h)$ sont données par

$$\lambda(m) = h\sum_{i=1}^n(2m_i+1)k_i \qquad (m\in\mathbb{N}^n). \tag{3}$$

Il est donc naturel de vérifier $(*)$ tout d'abord pour de tels potentiels. Dans [HR83], Helffer et Robert ont établi que, pour tout $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $h$ qui tend vers 0, on a

$$\mathrm{Tr}\big(f(E-P_V(h))\big) = \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\Big(C_0(f)+h^2C_2(f)+O(h^3)\Big),$$

où

$$\begin{cases} C_0(f) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(E-\xi^2-V(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi, \\ C_2(f) = -\kappa(n,\gamma)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f''(E-\xi^2-V(x))\|\nabla V(x)\|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi, \end{cases}$$

$\kappa(n,\gamma)$ étant indépendant de $V$ et de $f$. Pour toute fonction convexe de $C^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}^+$, l'inégalité $(*)$ est donc vraie pour $h$ suffisamment petit pourvu que $f''$ ne soit pas identiquement nulle sur $[0,E]$. De plus, Helffer et Robert ont montré dans [HR90] que $(*)$ était fausse pour certains $E$ lorsque $\varphi = \varphi_\gamma$ où $\gamma<1$ et $n\in\mathbb{N}$. Signalons aussi l'étude numérique [HP90] de Helffer et Parisse allant dans le sens de $L^{quad}_{\gamma,n} = L^C_{\gamma,n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\gamma \geq 1$.

Notre résultat principal affirme que l'inégalité $(*)$ est vraie pour une fonction $\varphi$ convexe lorsque $V(x) = \sum_{i=1}^n k_i^2 x_i^2$. Nous supposerons de plus que $\varphi$ est continue.

**Théorème.** *Soit $n \in \mathbb{N}_*$, $V(x) = \sum_{i=1}^n k_i^2 x_i^2$ où $k \in (\mathbb{R}_*^+)^n$ et une fonction $\varphi$ de $C_+^0(\mathbb{R})$ convexe. Alors, pour tout $E \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}_*^+$, on a*

$$(4) \qquad \sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi\Big(E - h\sum_{i=1}^n (2m_i+1)k_i\Big) \leqslant \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(E-\xi^2-V(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

*Remarques* : (i) Il est à noter que pour tout $\varphi$ de $C_+^0(\mathbb{R})$ on a

$$(5) \qquad \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(E-\xi^2-\sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \varphi\Big(E-2h\sum_{i=1}^n k_i x_i\Big)\,\mathrm{d}x.$$

En effet, un premier changement de variables fournit

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(E-\xi^2-\sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^n\prod_{i=1}^n k_i}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(E-\sum_{i=1}^n(\xi_i^2+x_i^2)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

Après $n$ changements de variables en coordonnées polaires, il vient

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(E-\xi^2-\sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\prod_{i=1}^n k_i}\int_{(\mathbb{R}_+)^n} \varphi\Big(E-\sum_{i=1}^n u_i^2\Big)\prod_{i=1}^n u_i\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, en faisant le changement de variables $x_i = u_i^2/(2k_ih)$, on obtient la formule (5) annoncée.

D'après ces calculs, pour démontrer le théorème, on peut se ramener au cas $h=1$ en posant $k' = kh$. Pour établir (4), nous supposerons donc $h=1$.

(ii) Au vu de (5), le théorème revient à comparer une somme discrète de valeurs de $\varphi$ à une intégrale sur des valeurs de $\varphi$. Ceci explique l'hypothèse de convexité faite sur $\varphi$.

(iii) Les précédents calculs fournissent aussi

$$(6) \qquad \begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\gamma\Big(E-\xi^2-\sum_{i=1}^n k_i^2x_i^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n(\gamma+j)}\frac{E^{\gamma+n}}{2^n\prod_{i=1}^n k_i}\\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^n\Gamma(\gamma+n+1)}\frac{E^{\gamma+n}}{\prod_{i=1}^n k_i}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

La fonction $\varphi_\gamma$ est convexe pour $\gamma \geq 1$. On en déduit le corollaire suivant qui répond aux questions posées dans [HR90-2] et [HP90]. En utilisant les notations relatives à la conjecture de Lieb–Thirring, on a $L_{\gamma,n}^{quad} = L_{\gamma,n}^C$ pour tout $\gamma \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

**Corollaire 1.** *Pour tout $E \in \mathbb{R}^+$ et tout $k \in (\mathbb{R}_*^+)^n$, on a*

$$(7) \qquad \sum_{m\in\mathbb{N}^n} \Big(E - h\sum_{i=1}^n(2m_i+1)k_i\Big)_+^\gamma \leqslant \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^n\Gamma(\gamma+n+1)}\frac{E^{\gamma+n}h^{-n}}{\prod_{i=1}^n k_i}.$$

*Remarque* : Lorsque $\gamma=1$ et $n=1$, on peut calculer facilement cette somme. Cela permet d'établir que (7) peut être une égalité.

Ces résultats peuvent être étendus aux opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique constant et potentiels quadratiques. Soit

$$H_{(B,K)} = \sum_{j=1}^{n} \Big( i\partial_j - \tfrac{1}{2}(Bx)_j \Big)^2 + \langle x, Kx \rangle$$

où $B$ est une matrice $n \times n$ réelle antisymétrique, $(Bx)_j$ désigne la $j$-ième composante de $Bx \in \mathbb{R}^n$ et $K$ est une matrice réelle symétrique défini positive. Lorsque $B = 0$, on retrouve l'opérateur $P_V(1)$ associé à $V(x) = \langle x, Kx \rangle$. On a

**Corollaire 2.** *Soient $H_{(B,K)}$ défini comme ci-dessus. Alors pour toute fonction $\varphi$ de $C^0_+(\mathbb{R})$ convexe, on a*

$$\mathrm{Tr}\big(\varphi(E - H_{(B,K)})\big) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(E - \xi^2 - \langle x, Kx \rangle)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi \qquad (\forall E \in \mathbb{R}).$$

*Démonstration.* Ceci est une conséquence directe du théorème. Par un calcul explicite, le spectre de $H_{(B,K)}$ est donné par

$$\lambda(m) = \sum_{i=1}^{n} (2m_j + 1) s_j \qquad (m \in (\mathbb{N})^n)$$

où les $s_j \in \mathbb{R}^+$ vérifient $\prod_{j=1}^n s_j^2 = \det K$ (voir par exemple [MU96]). Grâce au Théorème, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(\varphi(E - H_{(B,K)})\big) &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(E - \xi^2 - \sum_{j=1}^{n} s_j^2 x_j^2\Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(E - \xi^2 - V(x))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi \end{aligned} \qquad (\forall E \in \mathbb{R})$$

où on a utilisé un changement de variables.

## § 2. Démonstration des résultats

Nos résultats se déduisent de quatre lemmes faciles à établir.

Le résultat suivant affirme que l'ensemble $\mathfrak{S}_V$ est stable par convolution par une mesure positive à support dans $\mathbb{R}^+$.

**Lemme 1.** *Soit $V \in C^0(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (1), $\varphi \in \mathfrak{S}_V$ et $\mu$ une mesure positive à support dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\varphi * \mu \in \mathfrak{S}_V$.*

*Remarques :* (i) Ceci permet de retrouver le résultat de [AL78] qui affirme que $\varphi_\gamma \in \cap_V \mathfrak{S}_V$ implique $\varphi_{\gamma'} \in \cap_V \mathfrak{S}_V$ pour tout $\gamma' \geq \gamma$. En effet, on a

$$\varphi_{\gamma'} = \frac{\varphi_{\gamma'-\gamma-1} * \varphi_\gamma}{\displaystyle\int_0^1 t^{\gamma'-\gamma-1}(1-t)^\gamma\, \mathrm{d}t} \qquad (\gamma' > \gamma).$$

La démonstration du Lemme 1 est calquée sur celle de [AL78].
(ii) Pour $\psi \in C^0_+(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\psi = \varphi_1 * \psi''$ au sens des distributions. En effet, la convolution est bien définie pour les distributions à support semi-borné et on a $\varphi_1'' = \delta$. Puisqu'une distribution positive est une mesure, on peut affirmer grâce au Lemme 1 que si $\varphi_1 \in \mathfrak{S}_V$ alors toute fonction convexe de $C^0_+(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathfrak{S}_V$.

*Démonstration.* Les conditions sur $\varphi$ et $\mu$ permettent d'affirmer que $(\varphi * \mu) \in C^0_+(\mathbb{R})$. Soient $\lambda(i,h)$ les valeurs propres de $P_V(h)$. Par définition, on a, pour tout $E \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^+_*$,

$$\operatorname{Tr}\big((\varphi * \mu)(E - P_V(h))\big) = \sum_i (\varphi * \mu)(E - \lambda(i,h)) = \int_0^{+\infty} \varphi(E - t - \lambda(i,h))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Or la fonction $\varphi$ vérifie $(*)$ pour tout $E$ ; on a donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\big((\varphi * \mu)(E - P_V(h))\big) &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\Big(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi\big(E - t - \xi^2 - V(x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}\mu(t)\\ &= \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^{+\infty} \varphi\big(E - t - \xi^2 - V(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (\varphi * \mu)\big(E - \xi^2 - V(x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Lemme 2.** *Soient $V_1 \in C^0(\mathbb{R}^{n_1})$ et $V_2 \in C^0(\mathbb{R}^{n_2})$ vérifiant (1). On désigne par $V_1 \oplus V_2$ la fonction à $n_1 + n_2$ variables définie par*

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \qquad (V_1 \oplus V_2)(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

*Alors*

$$\mathcal{S}_{V_1} \cap \mathcal{S}_{V_2} \subset \mathcal{S}_{V_1 \oplus V_2}.$$

Par récurrence, on en déduit le résultat suivant

**Lemme 3.** *Soient $V_i \in C^0(\mathbb{R})$ et $V$ défini par*

$$V(x) = \sum_{i=1}^n V_i(x_i).$$

*Alors*

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_{V_i} \subset \mathcal{S}_V.$$

*Démonstration du Lemme 2.* Soient $\lambda_1(i,h)$ et $\lambda_2(j,h)$ les valeurs propres de $P_{V_1}(h)$ et $P_{V_2}(h)$. La fonction $V_1 \oplus V_2$ vérifie encore (1) et les valeurs propres de l'opérateur $P_{V_1\oplus V_2}(h)$ sont données par $\lambda_1(i,h) + \lambda_2(j,h)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}_{V_1} \cap \mathcal{S}_{V_2}$, nous devons donc majorer

$$S := \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \varphi(E - (\lambda_1(i,h) + \lambda_2(j,h))).$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}_{V_1}$, on a

$$S \leqslant \frac{h^{-n_1}}{(2\pi)^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi(E - \lambda_2(j,h) - \xi_1^2 - V_1(x_1))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}\xi_1$$

En utilisant l'inégalité $(*)$ pour $E - \xi_1^2 - V_1(x_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{h^{-n_1-n_2}}{(2\pi)^{n_1+n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \varphi(E - \xi_1^2 - \xi_2^2 - V_1(x_1) - V_2(x_2))\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\xi_2\Big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}\xi_1\\ &= \frac{h^{-n_1-n_2}}{(2\pi)^{n_1+n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \varphi\big(E - \xi^2 - (V_1 \oplus V_2)(x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

On remarque que cette démontration reste valable si on restreint l'inégalité $(*)$ à $E \in ]-\infty, E_0]$.

*Remarque :* On a un peu mieux dans le cas $n_1 = n_2 = 1$, $V_1(x_1) = k_1^2 x_1^2$. Pour tout $V_2$, l'ensemble des fonctions convexes de $C_0^+(\mathbb{R})$ est alors inclus dans $\mathcal{S}_{V_1 \oplus V_2}$. En effet, on peut écrire $\varphi_1 = \varphi_2'$ et on conclut en utilisant la remarque (ii) du Lemme 1 et que $\varphi_2 \in \mathcal{S}_{V_2}$.

Le lemme suivant énonce une propriété sans doute classique des fonctions convexes dont nous aurons besoin.

**Lemme 4.** *Soit une fonction $\varphi$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi$ est convexe si et seulement si on a pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ distincts l'inégalité*

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

*Démonstration.* On peut choisir $a$ et $b$ tels que $b > a$. La convexité de $\varphi$ implique

$$\forall t \in [a, \tfrac{1}{2}(a+b)] \qquad 2\,\varphi\big(\tfrac{1}{2}(a+b)\big) \leqslant \varphi(t) + \varphi(a+b-t). \tag{9}$$

On intégre par rapport à $t$ ces deux termes sur $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$. Il vient

$$(b-a)\varphi\big(\tfrac{1}{2}(a+b)\big) \leqslant \int_a^{(a+b)/2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{(a+b)/2} \varphi(a+b-t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui fournit l'inégalité (8).

Lorsque $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, la réciproque est facile. En effet, l'inégalité (9) permet d'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$,

$$R_\varphi(x,y) := \int_x^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - y\varphi\big(x + \tfrac{1}{2}y\big) \geq 0.$$

Un développement de Taylor au voisinage de $y = 0$, $x$ étant fixé, fournit

$$R_\varphi(x,y) = \frac{y^3}{96}\varphi''(x) + o(y^3)) \tag{10}$$

ce qui implique $\varphi''(x) \geq 0$.

La démonstration pour toute fonction $\varphi$ utilise la théorie des distributions. Soit $\vartheta$ une fonction test positive de $C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'hypothèse implique l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \vartheta(x)\Big(\int_x^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - y\varphi\big(x + \tfrac{1}{2}y\big)\Big)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

valable pour tout $y \geq 0$. En intervertissant les sommations, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} \vartheta(x)\Big(\int_x^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - y\varphi\big(x + \tfrac{1}{2}y\big)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) R_\vartheta(t-y, y)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

En faisant tendre $y$ vers 0 et en utilisant (10), il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\vartheta''(t) \geq 0 \tag{11}$$

pour tout $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta \geq 0$. Une fonction $\varphi$ continue est convexe si et seulement si $\varphi$ est une distribution et $\varphi'' \geq 0$ au sens des distributions i.e. pour tout $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta \geq 0$, on a

$$(\varphi'')(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\vartheta''(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

qui est l'inégalité (11). Cette remarque établit la convexité de $\varphi$.

*Démonstration du Théorème.* La remarque (i) du théorème nous permet de se restreindre au cas $h = 1$. Pour démontrer l'inégalité $(*)$, nous considérons tout d'abord $n = 1$. Nous devons majorer

$$S_1(E,k) := \sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi(E-(2m+1)k)$$

par le membre de droite de (5). L'inégalité (8) fournit

$$\varphi(E-(2m+1)k) \leqslant \frac{1}{2k}\int_{E-2(m+1)k}^{E-2mk} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad (m \in N). \tag{12}$$

En sommant ces termes, on obtient grâce à un changement de variable

$$S_1(E,k) \leqslant \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{E} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(E-2kx)\,\mathrm{d}x$$

ce qui constitue notre résultat pour $n = 1$.

Grâce au Lemme 3, on achève la démonstration du théorème lorsque $n > 1$.

Lorsque $\gamma = 1$ et $m \leqslant (E-k)/2k$, l'inégalité (12) est une égalité. Il vient

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} (E-(2m+1)k)_+ = \frac{1}{2k}\int_{E-2k[(E-k)/2k]}^{E} t\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{4k} - \frac{k}{2}\Big(2\Big\{\frac{E-k}{2k}\Big\}-1\Big)^2,$$

où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de $t$. La formule (7) est donc une égalité lorsque $E/(2k) \in \mathbb{N}$ et $n = 1$.

*Remarque* : La fonction $t \to \mathrm{e}^t$ définie sur $\mathbb{R}$ est convexe. Nos méthodes permettent de retrouver l'inégalité classique, vraie pour une large classe de potentiels $V$,

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{e}^{E-P_V(h)}\big) \leqslant \frac{h^{-n}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{E-\xi^2-V(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$$

pourvu que le membre de gauche soit fini.

*Conclusion* : Nous avons démontré que l'inégalité de Lieb–Thirring est vraie dans le cas quadratique pour $\gamma \geq 1$, $n \geq 1$. Ce résultat est optimal. Rappelons que cette inégalité n'est pas vraie pour des potentiels $V$ généraux lorsque $n \leqslant 2$ (voir l'annexe de Barnes dans [LT76]).

Je tiens à remercier B. Helffer de m'avoir proposé ce travail. Il serait vain ici de dénombrer ses remarques qui ont permis d'enrichir cet article.

## Bibliographie


[AL78] M. Aizenman & E. Lieb, " On semi-classical bounds for eigenvalues of Schrödinger Operators," *Phys. Lett.* 66A (1978) 427-429.

[BS96] Ph. Blanchard & J. Stubbe, "Bound States for Schrödinger Hamiltonians : Phase space methods and applications", Rev. in Math. Physics, vol. 8, no 4, May 1996, 503-548.

[HP90] B. Helffer & B. Parisse," Riesz means of bound states and semi classical limit connected with a Lieb–Thirring's conjecture III", *Prépublication de l'École Normale supérieure*, novembre 1990.

[HR83] B. Helffer & D. Robert, "Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications", *J. Funct. Anal. 53*, (1983) 246-268.

[HR90-1] B. Helffer & D. Robert, "Riesz means of bound states and semi classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture I", *Asymptotic Analysis*, 3 (1990), 91-103.

[HR90-2] B. Helffer & D. Robert, "Riesz means of bound states and semi classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture II", *Ann. Inst. Henri Poincaré, section Physique Théorique,* **53** (2) (1990), 139-147.

[LT76] E.H. Lieb & W.E. Thirring, "Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger equation and their relation to Sobolev inequalities", *Studies in Math. Phys.,* (E. Lieb, B. Simon, A. Wightman Eds), Princeton Univ. Press (1976), 269-303.

[MU96] H. Matsumoto & N. Ueki, "Spectral Analysis of Schrödinger operators with Magnetic Fields" *J. Funct. Anal.* 140, No 1, 218-255.

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris XI-Orsay
91405 Orsay cedex
France