"Thalassa Aitheria" Reports
RCMPI-95/04 (August 1995)

ЭКСКУРС В ОБРАТНУЮ ЗАДАЧУ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Д.В.Юрьев

Содержание

Введение

Обратная задача теории представлений лежит в основе теоретического аппарата различных разделов естествознания, техники и информатики. Смысл и пафос обратной задачи, раскрывающейся во многих формах, в сущности сводятся к восстановлению абстрактной математической структуры по ее конкретному проявлению, будь то заданный набор структурированных данных, управляемая отыскиваемой структурой динамика или связи того или иного рода между изучаемыми объектами. В свою очередь "палитра" абстрактных структур включает в себя как чисто алгебраические объекты, так и геометрические образы, а также все многообразие математических структур в "промежутке" между ними, составляющее предмет и алгебраической геометрии, и геометрической алгебры, и функционального анализа. Необходимо отметить, следуя [63], что хотя обратная задача теории представлений рассматривалась часто и достаточно подробно с точки зрения приложений и, как следствие, на соответствующем уровне строгости и в соответствующем языковом контексте (например, как инструмент квантовой теории), ее систематическое, нефрагментарное изложение, опирающееся на строгие математические постановки задач, практически оцутствует. Заполнение этого пробела и является целью настоящей статьи.

Однако, данная работа не является ни в коей мере попыткой охватить с высоты птичьего полета все богатство тем обратной задачи теории представлений, по большей части даже неведомых автору (как впрочем, и не только ему); скорее, это всего лишь перечисление того немногого, но поучительного, с чем имел счастье столкнуться автор in angello cum libello. Надеюсь, что описание подобного опыта не окажется напрасным и будет принято читателями с интересом. Надеюсь также, что определенная всецело авторским вкусом соразмерность причудливого (иногда просто странного, подчас немного курьезного) и существенного не окажется чуждой читателю.

В параграфах 1-3 основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, в параграфе 4 основным полем является поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

1. Освобождение скрытых симметрий и некоммутативная геометрия

1.1. Освобождение скрытых симметрий при помощи некоммутативного отображения Веронезе [62]. Во многих случаях поведение тех или иных естественных и искусственных систем управляется не только их явными (геометрическими), но зачастую и скрытыми симметриями. Основная трудность в работе с такими симметриями заключается в том, что они, как правило, "упакованы" и не могут быть "распакованы" до универсальных обертывающих алгебр алгебр Ли, так что существует проблема их корректного освобождения, иными словами, нахождения в некотором смысле "правильной" алгебраической структуры, ими представляемой. Взгляд некоммутативной геометрии [50,70] на проблему освобождения скрытых симметрий представляется чрезвычайно плодотворным. Наиболее интересными освобождающими скрытые симметрии отображениями являются некоммутативные отображения Веронезе (некоммутативные аналоги классических [36]); именно они составляют предмет изучения в данном параграфе, в то время как другая разновидность освобождающих отображений, некоммутативные полукубические отображения, будет рассмотрена в параграфе 1.3. На пути некоммутативной геометрии естественным образом возникает проблема некоммутативной "бирациональной" эквивалентности различным образом освобожденных скрытых симметрий (ср. 2[5,9:п.3.6,54]), также исследуемая на примерах в обоих параграфах.

Определение 1.

А. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра такая, что $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{A})$; линейное подпространство V называется *пространством скрытых симметрий*, если и только если (1) V является $\mathfrak{g}$–подмодулем $\mathcal{A}$, отображение симметризации Вейля определяет сюръекцию $W : S^{\cdot}(V) \mapsto \mathcal{A}$ (элементы V называются *скрытыми симметриями по отношению к* $\mathfrak{g}$). Ассоциативная алгебра $\mathcal{F}$ такая, что $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{F})$, называется *алгеброй освобожденных скрытых симметрий*, если и только если (1) $\mathcal{F}$ порождается V, (2) существует $\mathfrak{g}$–эквивариантный эпиморфизм алгебр $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{A}$, (3) отображение симметризации Вейля определяет изоморфизм $S^{\cdot}(V) \mapsto \mathcal{F}$ $\mathfrak{g}$–модулей.

Б. Пусть V – пространство скрытых симметрий и $\mathbf{C}$ – некоторый класс ассоциативных алгебр Оре; скрытые симметрии из V называются $\mathbf{C}$–*регулярными*, если и только если тела частных $D(\mathcal{F})$ изоморфны друг другу для всех отвечающих V алгебр $\mathcal{F}$ освобожденных скрытых симметрий из класса $\mathbf{C}$.

В. Пусть V – пространство скрытых симметрий в алгебре $\mathcal{A}$ по отношению к алгебре Ли $\mathfrak{g}$; подпространство V_0 пространства V называется *координатной базой* в V, если и только если (1) V_0 является $\mathfrak{g}$–подмодулем V, (2) образ отображения симметризации Вейля $W_0 : S^{\cdot}(V_0) \mapsto \mathcal{A}$ содержит V. Скрытые симметрии из V относятся к *типу* (V_0, n), если и только если образ $\oplus_{i \leq n} S^i(V_0)$ при отображении симметризации Вейля W_0 совпадает с V; в этом случае отображение $\oplus_{i \leq n} S^i(V_0) \mapsto \mathcal{F}$, композиция W_0 и вложения V в $\mathcal{F}$, называется *некоммутативным отображением Веронезе*.

Г. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, V – некоторый модуль над $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A}_s$ – семейство ассоциативных алгебр, параметризованное $s \in \mathcal{S}$, таких, что $\mathfrak{g} \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}_s)$, и $\pi_s : V \mapsto \mathcal{A}_s$ – семейство $\mathfrak{g}$–эквивариантных вложений таких, что $\pi_s(V)$ являются пространствами скрытых симметрий в $\mathcal{A}_s$ по отношению к $\mathfrak{g}$ для s из $\mathcal{S}$ общего положения. Ассоциативная алгебра $\mathcal{F}$ называется *алгеброй $\mathcal{A}_{s,s\in\mathcal{S}}$–универсально освобожденных скрытых симметрий*, если и только если $\mathcal{F}$ является алгеброй освобожденных скрытых симметрий из $V \simeq \pi_s(V)$ для алгебры $\mathcal{A}_s$, s – общего положения в $\mathcal{S}$. Скрытые симметрии называются *$\mathcal{A}_{s,s\in\mathcal{S}}$–универсально $\mathbf{C}$–регулярными*, если и только если тела частных $D(\mathcal{F})$ изоморфны для всех алгебр $\mathcal{F}$ $\mathcal{A}_{s,s\in\mathcal{S}}$–универсально освобожденных скрытых симметрий из класса $\mathbf{C}$.

Если $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра такая, что $\mathfrak{g} \subseteq (\mathcal{A})$, и V_0 – $\mathfrak{g}$–подмодуль $\mathcal{A}$, чьи элементы порождают $\mathcal{A}$ как алгебру, то во многих интересных случаях существует пространство скрытых симметрий V типа (V_0, n) в $\mathcal{A}$ для достаточно большого n.

Теорема 1 [62].

А. Тензорные операторы типа π_1 и π_2 [2,3,15] в модуле Верма [9] V_h над алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (π_i – конечномерное представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ размерности $2i+1$) образуют пространство скрытых симметрий типа $(\pi_1,2)$; алгебры с (неоднородными) квадратичными соотношениями $\mathrm{End}(V_h)$–универсально освобожденных скрытых симметрий образуют однопараметрическое семейство $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$.

Б. Тела частных $D(\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha))$ изоморфны, как следствие, тензорные операторы типа π_i ($i=1,2$) образуют $\mathrm{End}(V_h)$–универсально квадратично–регулярное семейство скрытых симметрий.

Замечания к доказательству. Первое утверждение теоремы проверяется путем прямых вычислений. Приведем их результат – явную конструкцию алгебры $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$.

Пусть L_i ($i=-1,0,1$) – базис в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ такой, что $[L_i,L_j]=(i-j)L_{i+j}$, d^k_j ($-k\le j\le k$) – базисы в π_k, в которых действие $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ имеет вид $L_i(d^k_j)=(ki-j)d^k_{i+j}$. Соответствующие тензорные операторы в модулях Верма V_h будут обозначаться заглавными буквами. Если модуль Верма V_h реализован в пространстве $\mathbb{C}[z]$ многочленов от одной комплексной переменной z, в котором генераторы алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ задаются выражениями $L_{-1}=z$, $L_0=z\partial_z+h$ и $L_1=z\partial_z^2+2h\partial_z$, то тензорные операторы D^k_i ($k=1,2,3$) имеют вид:

$$D^1_{-1}=z,\quad D^1_0=\xi+h,\quad D^1_1=(\xi+2h)\partial_z;$$
$$D^2_{-2}=z^2,\quad D^2_{-1}=z(\xi+h+\tfrac12),\quad D^2_0=\xi^2+2h\xi+\tfrac13 h(2h+1),$$
$$D^2_1=(\xi+2h)(\xi+h+\tfrac12)\partial_z,\quad D^2_2=(\xi+2h)(\xi+2h+1)\partial_z^2,$$

где $\xi=z\partial_z$.

Алгебра $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$ порождается элементами l_i ($i=-1,0,1$) и w_i ($i=-2-1,0,1,2$); действие $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ имеет вид $L_i(l_j)=(i-j)l_{i+j}$, $L_i(w_j)=(2i-j)w_{i+j}$; коммутационные соотношения приведены ниже:

$$\begin{aligned}
[l_{-1},l_0]=&-l_{-1}+\alpha(l_1\circ w_{-2}-2l_0\circ w_{-1}+l_{-1}\circ w_0),\\
[l_{-1},l_1]=&-2l_0+\alpha(l_1\circ w_{-1}-2l_0\circ w_0+l_{-1}\circ w_1),\\
[l_0,l_1]=&-l_1+\alpha(l_1\circ w_0-2l_0\circ w_1+l_{-1}\circ w_2);\\
[l_{-1},w_{-1}]=&-w_{-2}+4\alpha l_{-1}^2+4\alpha(w_{-2}\circ w_0-w_{-1}^2),\\
[l_{-1},w_0]=&-2w_{-1}+8\alpha l_{-1}\circ l_0+4\alpha(w_{-2}\circ w_1-w_{-1}\circ w_0),\\
[l_{-1},w_1]=&-3w_0+4\alpha(l_{-1}\circ l_1+2l_0^2)+2\alpha(w_{-2}\circ w_2+2w_{-1}\circ w_1-3w_0^2),\\
[l_{-1},w_2]=&-4w_1+16\alpha l_0\circ L_1+8\alpha(w_{-1}\circ w_2-w_0\circ w_1),\\
[l_0,w_{-2}]=&2w_{-2}-8\alpha l_{-1}^2-8\alpha(w_{-2}\circ w_0-w_{-1}^2),\\
[l_0,w_{-1}]=&w_{-1}-4\alpha l_{-1}\circ l_0-2\alpha(w_{-2}\circ w_1-w_{-1}\circ w_0),\quad [l_0,w_0]=0,\\
[l_0,w_1]=&-w_1+4\alpha l_0\circ l_1+2\alpha(w_{-1}\circ w_2-w_0\circ w_1),\\
[l_0,w_2]=&-2w_2+8\alpha l_1^2+8\alpha(w_0\circ w_2-w_1^2),\\
[l_1,w_{-2}]=&4w_{-1}-16\alpha l_{-1}\circ l_0-8\alpha(w_{-2}\circ w_1-w_{-1}\circ w_0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[l_1,w_{-1}] =&3w_0-4\alpha(l_{-1}\circ l_1+2l_0^2)-2\alpha(w_{-2}\circ w_2+2w_{-1}\circ w_1-3w_0^2),\\
[l_1,w_0] =&2w_1-8\alpha l_0\circ l_1-4\alpha(w_{-1}\circ w_2-w_0\circ w_1),\\
[l_1,w_1] =&w_2-4\alpha l_1^2-4\alpha(w_0\circ w_2-w_1^2);\\
[w_{-2},w_{-1}] =&-2l_{-1}\circ w_{-2},\quad [w_{-2},w_0]=-\tfrac{4}{3}(2l_{-1}\circ w_{-1}+l_0\circ w_{-2}),\\
[w_{-2},w_1] =&-3l_{-1}\circ w_0-2l_0\circ w_{-1}-l_1\circ w_{-2},\\
[w_{-2},w_2] =&-4(l_{-1}\circ w_1+l_1\circ w_{-1}),\\
[w_{-1},w_0] =&-\tfrac{1}{6}(3l_{-1}\circ w_0+10l_0\circ w_{-1}-l_1\circ w_{-2}),\\
[w_{-1},w_1] =&-\tfrac{1}{2}(l_{-1}\circ w_1+6l_0\circ w_0+l_1\circ w{-}1),\\
[w_{-1},w_2] =&-l_{-1}\circ w_2-2l_0\circ w_1-3l_1\circ w_0,\\
[w_0,w_1] =&\tfrac{1}{6}(l_{-1}\circ w_2-10l_0\circ w_1-3l_1\circ w_0),\\
[w_0,w_2] =&-\tfrac{4}{3}(2l_1\circ w_1+l_0\circ w_2),\quad [w_1,w_2]=-2l_1\circ w_2,
\end{aligned}
$$

где $a\circ b=\frac{1}{2}(ab+ba)$.

Алгебра $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$ допускает представление тензорными операторами в модуле Верма V_h над $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: $l_i\mapsto\delta^{-1}D_i^1$, $w_i\mapsto\delta^1D_i^2$ ($\delta=1-\frac{1}{3}(2h+1)(2h+3)\alpha$).

Второе утверждение теоремы доказывается при помощи построения явной конструкции изоморфизма в четыре шага. Шаг первый: операторы L_i представляются в виде $L_i=\mathrm{ad}(\mathtt{l}_i)=\mathrm{ad}(l_i)+\sum_{j\geq1}\alpha^j\,\mathrm{ad}(X_{i,j})$, $X_{i,j}\in\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$. Шаг второй: однозначно определяются генераторы $\mathtt{w}_i=w_i+\sum_{j\geq1}\alpha^jY_{i,j}$, $Y_{i,j}\in\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$ такие, что $[\mathtt{l}_i,\mathtt{w}_j]=(2i-j)\mathtt{w}_{i+j}$. Третий шаг: операторы $\mathtt{l}_i$ и $\mathtt{w}_j$ удовлетворяют коммутационным соотношениям в $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});0)$. В результате мы получили, что деформация $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$ алгебры $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});0)$ формально тривиальна. Шаг четвертый: формальные ряды для $\mathtt{l}_i$ и $\mathtt{w}_j$ рациональны.

1.2. Алгебра Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и ее центральное расширение $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ [40,61].

Рассмотрим модель $M_{\mathrm{od}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ нечетномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, а также универсальную обертывающую алгебру $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ и идеал I_λ в ней, порожденный $K-\lambda$, где K – элемент Казимира. Фактор $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))/I_\lambda$ снабжает модель $M_{\mathrm{od}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ структурой ассоциативной алгебры, которую мы будем называть *ассоциативной модельной алгеброй для алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и обозначать $\mathrm{Md}^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$. Коммутаторная алгебра $\mathrm{Md}^{(\lambda)}_{[\cdot,\cdot]}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ ассоциативной модельной алгебры $\mathrm{Md}^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ называется *модельной алгеброй Ли для* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (или *алгеброй Фейгина* – см. [32]).

Алгеброй Рака-Вигнера $\mathcal{RW}^{(\lambda)}_\infty(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ бесконечного порядка для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (ср. [48]) называется универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}(\mathrm{Md}^{(\lambda)}_{[\cdot,\cdot]}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})))$ модельной алгебры Ли $\mathrm{Md}^{(\lambda)}_{[\cdot,\cdot]}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$.

Определение 2 [61]. Ассоциативная алгебра $\mathcal{RW}^{(\lambda)}_n(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ называется *(редуцированной) алгеброй Рака–Вигнера порядка n для алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, если и только если

(i) она допускает эпиморфизм на ассоциативную модельную алгебру

$\mathrm{Md}^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$;

(ii) $\mathcal{RW}_n^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ порождается как алгебра прямой суммой $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \pi_{n-1} \oplus \pi_n$ первых n нечетномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (эта прямая сумма как $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–модуль изоморфна $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$), действие $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ задается при помощи $\mathrm{ad}(\pi_1)$;

(iii) $\mathcal{RW}_n^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ изоморфна как $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–модуль $S^{\cdot}(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))$ ($S^{\cdot}(V)$ – симметрическая алгебра над V).

Если алгебра Рака–Вигнера имеет порядок 2, то индекс 2 будет опускаться, а сама алгебра называться просто алгеброй Рака–Вигнера. Алгебра Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ не зависит от λ и совпадает с алгеброй $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});0)$ предыдущего параграфа.

Теорема 2А [61]. *Для любого n существует алгебра Рака–Вигнера $\mathcal{RW}_n^{(\lambda)}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ порядка n.*

Теорема 2Б [40]. *Алгебра Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ допускает единственное $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–эквивариантное центральное расширение $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ в классе алгебр с неоднородными квадратичными соотношениями. Это расширение может быть $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–эквивариантно дефирмировано до расширения $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha))$ алгебры $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});\alpha)$.*

Центральное расширение задается с помощью линейных структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, иными словами, изменяются коммутаторы только генераторов w_j (отметим, что в работе [40] содержится неточность в записи трех коммутаторов; правильный вариант представлен в [62]):

$$
\begin{aligned}
&[w_{-1},w_{-2}] = 2l_{-1}\circ w_{-2}, \quad [w_0,w_{-2}] = \tfrac{4}{3}(2l_{-1}\circ w_{-1} + l_0\circ w_{-2}),\\
&[w_0,w_{-1}] = \tfrac{1}{6}(-l_1\circ w_2 + 10 l_0\circ w_{-1} + 3l_{-1}\circ w_0 - 3\rho l_{-1}),\\
&[w_1,w_{-2}] = l_1\circ w_{-2} + 2l_0\circ w_{-1} + 3l_{-1}\circ w_0 + \rho l_{-1},\\
&[w_1,w_{-1}] = \tfrac{1}{2}(l_1\circ w_{-1} + 6l_0\circ w_0 + l_{-1}\circ w_1 - \rho l_0),\\
&[w_2,w_{-2}] = 4(l_1\circ w_{-1} + l_1\circ w_1),\\
&[w_2,w_{-1}] = 2l_{-1}\circ w_2 + 2l_0\circ w_1 + 3l_1\circ w_0 + \rho l_1,\\
&[w_1,w_0] = \tfrac{1}{6}(-l_{-1}w_2 + 10l_0\circ w_1 + 3l_1\circ w_0 - 3\rho l_1),\\
&[w_2,w_0] = \tfrac{4}{3}(2l_1\circ w_1 + l_0\circ w_2, \quad [w_2,w_1] = 2l_1\circ w_2, \quad [\rho,l_i] = [\rho,w_j] = 0.
\end{aligned}
$$

При значении $\tilde{c}$ центрального элемента ρ, стремящемся к бесконечности, коммутационные соотношения в алгебре $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ переходят в коммутационные соотношения алгебры $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ (при замене $w_i' = w_i/\tilde{c}^{1/2}$), таким образом, алгебра $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ может рассматриваться и как деформация универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ в классе квадратичных алгебр.

Теорема 2В [40]. *Представление алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ в модели неприводимых нечетномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ скрытыми симметриями [4] однозначным образом деформируется до представления $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ (такого, что $w_i^* = w_{-i}$).*

Утверждение теоремы получается с помощью прямых вычислений, явные формулы для деформации представления содержатся в работе [40, стр.345].

Таким образом, алгебра Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ может рассматриваться как спектр–генерирующая ("динамическая") алгебра [2,22] (см. также [51,75]) для модели неприводимых нечетномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (конечномерных неприводимых представлений группы Ли $\mathbf{SO}(3)$) наряду с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

1.3. Освобождение скрытых симметрий при помощи некоммутативного полукубического отображения [63].

Определение 3. Пусть V – пространство скрытых симметрий в алгебре $\mathcal{A}$ относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$; скрытые симметрии из V называются скрытыми симметриями *полукубического типа*, если существуют (1) нетривиальное разложение V в прямую сумму $V_2 \oplus V_3$ поспространств V_2 и V_3, (2) неприводимый $\mathfrak{g}$–модуль V_1 такой, что определены эпиморфизмы $S^i(V_1) \mapsto V_i$ $(i = 2, 3)$ $\mathfrak{g}$–модулей; в этом случае отображение $\bigoplus_{i=2,3} S^i(V_1) \mapsto \mathcal{F}$, композиция отображений $S^i(V_1) \mapsto V_i$ и вложения V в $\mathcal{F}$, называется *некоммутативным полукубическим отображением.*

Теорема 3 [63]. *Тензорные операторы типа π_2 и π_3 в модуле Верма V_h над алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (π_s – конечномерное представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ размерности $2i+1$) образуют пространство скрытых симметрий полукубического типа; существует в точности одна алгебра с (однородными) квадратичными соотношениями* $\mathfrak{A}_h$ освобожденных скрытых симметрий для каждого h.*

Пусть L_i – базис в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ такой, что $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}$, $(i, j = -1, 2, 3)$ и d_j^k $(-k \leq j \leq k)$ – базисы в π_k, в которых действие $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ имеет вид $L_i(d_j^k) = (ki - j)d_{i+j}^k$. Соответствующие тензорные операторы в модулях Верма V_h будут обозначаться заглавными буквами. Если модуль Верма V_h реализуется в пространстве $\mathbb{C}[z]$ многочленов от одной комплексной переменной z, в котором генераторы $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ действуют как $L_{-1} = z$, $L_0 = z\partial_z + h$, $L_1 = z\partial_z^2 + 2h\partial_z$, то тензорные операторы D_i^k $(k = 2, 3)$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
D_{-2}^2 &= z^2 \\
D_{-1}^2 &= z(\xi + h + \tfrac{1}{2}) \\
D_0^2 &= \xi^2 + 2h\xi + \tfrac{1}{3}h(2h+1) \\
D_1^2 &= (\xi + 2h)(\xi + h + \tfrac{1}{2})\partial_z \\
D_2^2 &= (\xi + 2h)(\xi + 2h + 1)\partial_z^2
\end{aligned}$$

* Подобные алгебры образуют естественный класс ассоциативных алгебр. Их исследование было начато независимо и одновременно несколькими авторами, работа [83] может быть отмечена как одна из наименее известных. Выделим также обзор [14] по указанной теме.

$$
\begin{aligned}
D^3_{-3} &= z^3\\
D^3_{-2} &= z^2(\xi+h+1)\\
D^3_{-1} &= z(\xi^2+(2h+1)\xi+\tfrac{2}{5}(h+1)(2h+1))\\
D^3_{0} &= \xi^3+3h\xi^2+(2h^2+\tfrac{1}{5}(h+1)(2h+1))\xi+\tfrac{1}{5}h(h+1)(2h+1)\\
D^3_{1} &= (\xi+2h)(\xi^2+(2h+1)\xi+\tfrac{2}{5}(h+1)(2h+1))\partial_z\\
D^3_{2} &= (\xi+2h)(\xi+2h+1)(\xi+h+1)\partial_z^2\\
D^3_{3} &= (\xi+2h)(\xi+2h+1)(\xi+2h+2)\partial_z^3
\end{aligned}
$$

где $\xi = z\partial_z$.

Доказательство теоремы. Обозначим отображение $d_i^k \mapsto D_i^k$ символом O, тогда тензорное произведение $\pi_i \otimes \pi_j = \bigoplus_{k=|i-j|}^{i+j} \pi_k$ может быть разложено на две части: $\pi_i \otimes \pi_j = \pi_i \vee \pi_j \oplus \pi_i \wedge \pi_j$, где

$$\mathsf{O}(\pi_i \vee \pi_j) = [\mathsf{O}(\pi_i), \mathsf{O}(\pi_j)]_+, \quad \mathsf{O}(\pi_i \wedge \pi_j) = [\mathsf{O}(\pi_i), \mathsf{O}(\pi_j)]_-$$

или явно

$$\pi_i \vee \pi_j = \bigoplus_{k=|i-j|, i+j-k\in 2\mathbb{Z}}^{i+j} \pi_k, \quad \pi_i \wedge \pi_j = \bigoplus_{k=|i-j|, i+j-k\in 2\mathbb{Z}+1}^{i+j} \pi_k.$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–эквивариантная структура алгебры с однородными квадратичными соотношениями определяется посредством выражения коммутаторов $[\pi_2,\pi_2]_-$, $[\pi_2,\pi_3]_-$ $[\pi_3,\pi_3]_-$ через антикоммутаторы $[\pi_2,\pi_3]_+$, $[\pi_2,\pi_2]_+ + [\pi_3,\pi_3]_+$ и $[\pi_2,\pi_3]_+$, соответственно (здесь π_i – коллективное обозначение для освобожденных скрытых симметрий, преобразующихся согласно заданному представлению). Это выражение задается вложениями

$$
\begin{aligned}
&\pi_2 \wedge \pi_2 = \pi_3 \oplus \pi_1 \subseteq \pi_5 \oplus \pi_3 \oplus \pi_1 = \pi_2 \vee \pi_3,\\
&\pi_2 \wedge \pi_3 = \pi_4 \oplus \pi_2 \subseteq (\pi_4 \oplus \pi_2) + (\pi_6 \oplus \pi_4 \oplus \pi_2) = \pi_2 \vee \pi_2 + \pi_3 \vee \pi_3,\\
&\pi_3 \wedge \pi_3 = \pi_5 \oplus \pi_3 \oplus \pi_1 = \pi_2 \vee \pi_3;
\end{aligned}
$$

так что общие коммутационные соотношения содержат 4 неопределенные константы, две из них (первая и четвертая) могут быть нормированы преобразованиями тензорных операторов D_i^k: $D_i^2 \to \lambda_2 D_i^2$, $D_i^3 \to \lambda_3 D_i^3$, вторая и четвертая фиксируются соотношениями Якоби для троек $\pi_2 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ и $\pi_3 \otimes \pi_3 \otimes \pi_2$; тождества Якоби для троек из $\pi_2 \otimes \pi_2 \otimes \pi_2$ и $\pi_3 \otimes \pi_3 \otimes \pi_3$ не содержат новых условий $\square$

Замечание 1. Алгебры $\mathfrak{A}_h$ не изоморфны друг другу при различных h. Не существует алгебры с (однородными или неоднородными) квадратичными соотношениями, которая бы освобождала описанные скрытые симметрии $\mathrm{End}(V_h)$–универсально.

Гипотеза 1. Утверждение теоремы остается в силе при замене π_2 и π_3 на π_n и π_{n+1} $(n \geq 3)$.

Вопрос 1:. Являются ли алгебры $\mathfrak{A}_h$ теоремы 1 алгебрами Кошуля [69]?

Замечание 2. Возможно, что изучение освобожденных скрытых симметрий, задавемых тензорными операторами, может пролить свет на некоторые дополнительные соотношения в теории коэффициентов Клебша–Гордана [38] (см. также [15,16]).

1.4. $\mho$–алгебры [63].

Определение 4. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и W – ее (неприводимое) представление. *$\mho$–алгеброй* называется ассоциативная алгебра $\mho(\mathfrak{g}, W)$ такая, что (1) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – подалгебра $\mho(\mathfrak{g}, W)$, так что $\mathfrak{g}$ действует на $\mho(\mathfrak{g}, W)$ естественным образом, (2) задано $\mathfrak{g}$–эквивариантное вложение W в $\mho(\mathfrak{g}, W)$, таким образом, можно рассматривать W как подпространство в $\mho(\mathfrak{g}, W)$, (3) $\mathfrak{g}$–эквивариантное вложение W в $\mho(\mathfrak{g}, W)$ продолжается до $\mathfrak{g}$–эквивариантного вложения $S^{\cdot}(W)$ в $\mho(\mathfrak{g}, W)$, определенного при помощи симметризации Вейля, следовательно, $S^{\cdot}(W)$ может рассматриваться как подпространство в $\mho(\mathfrak{g}, W)$; (4) $\mathfrak{g}$–модули $\mho(\mathfrak{g}, W)$ и $S^{\cdot}(\mathfrak{g}) \otimes S^{\cdot}(W)$ изоморфны, при этом подразумевается изоморфизм подалгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mho(\mathfrak{g}, W)$ и $S^{\cdot}(\mathfrak{g})$ как $\mathfrak{g}$–модулей; (5) в произвольном базисе w_l в W коммутатор двух элементов этого базиса в алгебре $\mho(\mathfrak{g}, W)$ может быть представлен в виде $[w_i, w_j] = f_{ij}^k w_k$, при этом "некоммутативные структурные функции" f_{ij}^k являются элементами алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Обозначение $\mho(\mathfrak{g}, W)$ подчеркивает аналогию между $\mho$–алгебрами и универсальными обертывающими алгебрами.

Теорема 4 [63]. *Существует в точности одна $\mho$–алгебра $\mho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \pi_n)$ ($n = 1, 2, 3$) с "некоммутативными структурными функциями" f_{ij}^k степени $n-1$, которая является при этом алгеброй $\mathrm{End}(V_h)$–универсально освобожденных скрытых симметрий.*

В случае $n = 1$ $\mho$–алгебра $\mho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \pi_n)$ является скрещенным произведением двух копий $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ (т.е. универсальной обертывающей алгеброй полупрямой суммы двух копий $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, одна копия действует на другой при помощи присоединенного действия). В случае $n = 2$ $\mho$–алгебра $\mho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \pi_n)$ совпадает с алгеброй Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$. Опишем явно $\mho$–алгебру $\mho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \pi_3)$.

Зафиксируем базис u_k ($-3 \le k \le 3$) в π_3 такой, что $L_i(u_k) = (3i - k)u_{i+k}$. Построим также элементы Ω_j ($-2 \le j \le 2$; $[L_i, \Omega_j] = (2i - j)\Omega_{i+j}$) в $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$:

$$\Omega_{-2} = L_{-1}^2, \quad \Omega_{-1} = \tfrac{1}{2}(L_0 L_{-1} + L_{-1} L_0), \quad \Omega_0 = \tfrac{1}{6}(L_1 L_{-1} + 4L_0^2 + L_{-1} L_1),$$
$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2}(L_1 L_0 + L_0 L_1), \quad \Omega_2 = L_1^2.$$

Рассмотрим далее выражения A_j ($-5 \le j \le 5$; $[L_i, A_j] = (5i - j)A_{i+j}$), B_j ($-3 \le j \le 3$; $[L_i, B_j] = (3i - j)B_{i+j}$), C_j ($j = -1, 0, 1$, $[L_i, C_j] = (i - j)C_{i+j}$):

$$2A_{-5} = -\Omega_{-2} u_{-3}$$
$$A_{-4} = -\tfrac{1}{5}(2\Omega_{-1} u_{-3} + 3\Omega_{-2} u_{-2})$$

$$
\begin{aligned}
A_{-3} &= -\tfrac{1}{15}(\Omega_0 u_{-3} + 8\Omega_{-1}u_{-2} + 5\Omega_{-2}u_{-1})\\
A_{-2} &= -\tfrac{1}{30}(\Omega_1 u_{-3} + 9\Omega_0 u_{-2} + 15\Omega_{-1}u_{-1} + 5\Omega_{-2}u_0)\\
A_{-1} &= -\tfrac{1}{210}(\Omega_2 u_{-3} + 24\Omega_1 u_{-2} + 90\Omega_0 u_{-1} + 80\Omega_{-1}u_0 + 15\Omega_{-2}u_1)\\
A_0 &= -\tfrac{1}{42}(\Omega_2 u_{-2} + 10\Omega_1 u_{-1} + 20\Omega_0 u_0 + 10\Omega_{-1}u_1 + \Omega_{-2}u_2)\\
A_1 &= -\tfrac{1}{210}(15\Omega_2 u_{-1} + 80\Omega_1 u_0 + 90\Omega_0 u_1 + 24\Omega_{-1}u_2 + \Omega_{-2}u_3)\\
A_2 &= -\tfrac{1}{30}(5\Omega_2 u_0 + 15\Omega_1 u_1 + 9\Omega_0 u_2 + \Omega_{-1}u_3)\\
A_3 &= -\tfrac{1}{15}(5\Omega_2 u_1 + 8\Omega_1 u_2 + 2\Omega_0 u_3)\\
A_4 &= -\tfrac{1}{5}(3\Omega_2 u_2 + 2\Omega_1 u_3),\\
A_5 &= -\Omega_2 u_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{-3} &= \Omega_0 u_{-3} - 2\Omega_{-1}u_{-2} + \Omega_{-2}u_{-1}\\
B_{-2} &= \tfrac{1}{3}(\Omega_1 u_{-3} - 3\Omega_{-1}u_{-1} + 2\Omega_{-2}u_0)\\
B_{-1} &= \tfrac{1}{15}(\Omega_2 u_{-3} + 6\Omega_1 u_{-2} - 9\Omega_0 u_{-1} - 4\Omega_{-1}u_0 + 6\Omega_{-2}u_1)\\
B_0 &= \tfrac{1}{5}(\Omega_2 u_{-2} + \Omega_1 u_{-1} - 4\Omega_0 u_0 + \Omega_{-1}u_1 + \Omega_{-2}u_2)\\
B_1 &= \tfrac{1}{15}(6\Omega_2 u_{-1} - 4\Omega_1 u_0 - 9\Omega_0 u_1 + 6\Omega_{-1}u_2 + \Omega_{-2}u_3)\\
B_2 &= \tfrac{1}{3}(2\Omega_2 u_0 - 3\Omega_1 u_1 + \Omega_{-1}u_3)\\
B_3 &= \Omega_2 u_1 - 2\Omega_1 u_2 + \Omega_0 u_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{-1} &= \Omega_2 u_{-3} - 4\Omega_1 u_{-2} + 6\Omega_0 u_{-1} - 4\Omega_{-1}u_0 + \Omega_{-2}u_1\\
C_0 &= \Omega_2 u_{-2} - 4\Omega_1 u_{-1} + 6\Omega_0 u_0 - 4\Omega_{-1}u_1 + \Omega_{-2}u_2\\
C_1 &= \Omega_2 u_1 - 4\Omega_1 u_0 + 6\Omega_0 u_1 - 4\Omega_{-1}u_2 + \Omega_{-2}u_3.
\end{aligned}
$$

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),\pi_3)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
[u_{-3},u_{-2}] &= 3A_{-5}, \quad [u_{-3},u_{-1}] = 6A_{-4},\\
[u_{-3},u_0] &= 9A_{-3} - \tfrac{3}{2}D_{-3}, \quad [u_{-3},u_1] = 12A_{-2} - 6D_{-2},\\
[u_{-3},u_2] &= 15A_{-1} - 6D_{-1} - \tfrac{3}{7}C_{-1}, \quad [u_{-3},u_3] = 18A_0 - 42D_0 - \tfrac{36}{7}C_0,\\
[u_{-2},u_{-1}] &= 3A_{-3} + D_{-3}, \quad [u_{-2},u_0] = 6A_{-2} + \tfrac{3}{2}D_{-2},\\
[u_{-2},u_1] &= 9A_{-1} - 3D_{-1} + \tfrac{1}{7}C_{-1}, \quad [u_{-2},u_2] = 12A_0 - 11D_0 + \tfrac{4}{7}C_0,\\
[u_{-2},u_3] &= 15A_1 - 6D_1 - \tfrac{3}{7}C_1, \quad [u_{-1},u_0] = 3A_{-1} + \tfrac{3}{2}D_{-1} - \tfrac{3}{35}C_{-1},\\
[u_{-1},u_1] &= 6A_0 + 2D_0 - \tfrac{4}{35}C_{-1}, \quad [u_{-1},u_2] = 9A_1 - 3D_1 + \tfrac{1}{7}C_1,\\
[u_{-1},u_3] &= 12A_2 - 6D_2, \quad [u_0,u_1] = 3A_1 + \tfrac{3}{2}D_1 - \tfrac{3}{35}C_1,\\
[u_0,u_2] &= 6A_2 + \tfrac{3}{2}D_2, \quad [u_0,u_3] = 9A_3 - \tfrac{3}{2}D_3,\\
[u_1,u_2] &= 3A_3 + D_3, \quad [u_1,u_3] = 6A_4, \quad [u_2,u_3] = 3A_5,
\end{aligned}
$$

где $D_k = B_k - 2u_k + \varkappa(4Ku_k + 66u_k - 15B_k)$ (K – элемент Казимира для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: $K = L_{-1}L_1 - 2L_0^2 + L_1L_{-1}$; константа $\varkappa$ фиксируется тождествами Якоби и может быть определена при их проверке на тройке u_{-2}, u_{-1}, u_0).

Гипотеза 2. Утверждение теоремы остается в силе при $n > 3$.

1.5. Освобождение скрытых симметрий и ресинтез алгебраических структур.

Определение 5. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра Хопфа [10,25,44], $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли такая, что $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ (например, $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$), V – пространство скрытых симметрий $\mathcal{A}$, итерации коумножения в алгебре Хопфа $\mathcal{A}$ определяют по некоторому правилу вложения V в алгебры $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}^{\otimes n}$. *Ресинтезом* $(\mathcal{A}, V)$ называется ассоциативная алгебра $\mathcal{A}_V$ такая, что (1) $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{A}_V$, (2) задано $\mathfrak{g}$–эквивариантное вложение V в $\mathcal{A}_V$ (т.о. можно рассматривать V как подпространство в $\mathcal{A}_V$), (3) для любого n определен $\mathfrak{g}$–эквивариантный гомоморфизм $\mathcal{A}_V \mapsto \mathcal{A}_n$, тождественный на V, (4) $\mathcal{A}_V$ является минимальной алгеброй, удовлетворяющей указанным требованиям.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$, V – совокупность операторов спина (т.е. элементов $\mathfrak{su}(2)$ и операторов спин–спинового взаимодействия (квадратичных выражений от операторов спина [8,19]), вложение V в $\mathcal{A}_n$ сопоставляет генераторам $\mathfrak{su}(2)$ операторы суммарного спина, а квадратичным выражениям от них – сумму операторов попарного спин–спинового взаимодействия различных частиц (т.е. без самодействия), то ресинтезом $(\mathcal{A}, V)$ будет вещественная форма алгебры Рака–Вигнера $\mathcal{RW}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$.

Отметим, что континуальный аналог ресинтеза продуцирует аномалии и в рассмотренном примере приводит к вещественной форме алгебры $\widehat{\mathcal{RW}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$.

Методы ресинтеза алгебраических структур используются при описании спектра квантовых чисел частицеподобных состояний квантовых решеточных и квантовополевых систем.

1.6. Динамическая обратная задача теории представлений и некоммутативная геометрия [43]. Цель данного параграфа – вычленить "динамическую" параллель к обратной задаче, восходящую к классической работе Е.Вигнера [84].

Динамическая обратная задача теории представлений (задача Е.Вигнера). Для заданной системы операторных дифференциальных уравнений

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{X}_i(t) = f_i(\hat{X}_1(t)\dots\hat{X}_n(t)) \qquad (1 \le i \le n)$$

найти алгебраический объект $\mathfrak{A}$, порожденный генераторами e_i и однопараметрическую группу γ_t автоморфизмов $\mathfrak{A}$ такие, что при любом (надлежащим образом определенном) операторном представлении T алгебраического объекта $\mathfrak{A}$ группа γ_t определяется системой уравнений $(*)$, коль скоро $T(e_i) = \hat{X}_i(0)$.

Алгебраический объект $\mathfrak{A}$ может быть ассоциативной алгеброй полиномиального роста (например, алгеброй Пуанкаре–Бирхгофа–Витта [13]), хотя и другие варианты возможны (такие как парастатистики [57,7,76,78] или соотношения в изотопических парах [41,63]). В дальнейшем, однако, указанные возможности не будут рассматриваться.

Практически наибольший интерес представляют бесконечные системы операторных уравнений, отвечающие нелинейным операторным уравнениям в частных производных квантовой теории поля (например, уравнениям сайн–Гордона или Лиувилля, рассматривавшимся с указанной точки зрения в качестве характерных примеров ленинградской школой акад. Л.Д.Фаддеева в рамках квантового метода обратной задачи, группой из Лаборатории теоретической физики Высшей нормальной школы в Париже под руководством проф. Ж.-Л.Жервэ, коллективом отдела квантовой теории поля в Математическом институте имени В.А.Стеклова в Москве). Однако, с методологической точки зрения целесообразно рассматривать и конечные системы операторных уравнений, отвечающие обыкновенным дифференциальным уравнениям (нерелятивистской) квантовой механики. О роли динамических систем в некоммутативных алгебрах как математического аппарата квантовой механики и квантовой теории поля см. [35,37].

Определение 6. *Динамическим освобождением скрытых симметрий* называется сопоставление заданной системе операторных дифференциальных уравнений $(*)$ пары $(\mathfrak{A}, \gamma_t)$, где $\mathfrak{A}$ – ассоциативная алгебра, порожденная генераторами $e_1, \dots e_n$ так,что отображение симметризации Вейля $w : S^{\cdot}(H) \mapsto \mathfrak{A}$ $(H = \mathrm{span}(e_1, \dots e_n))$ является изоморфизмом линейных пространств, а γ_t – однопараметрическая группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ такая, что при любом операторном представлении T ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ группа γ_t определяется системой $(*)$, коль скоро $T(e_i) = \hat{X}_i(0)$. Динамической освобождение симметрий называется *гамильтоновым*, если существует такой элемент h алгебры $\mathfrak{A}$, что система $(*)$ приводится к виду $\frac{\partial}{\partial t}\hat{X}_i = [\hat{H}, \hat{X}_i]$ $(\hat{H} = T(h))$.

С алгеброгеометрической точки зрения динамическое освобождение скрытых симметрий заключается в интерпретации заданной системы операторных дифференциальных уравнений как потока (динамической системы) на некоммутативном алгебраическом многообразии [70]. Необходимо отметить, что в отличие от коммутативного случая данная интерпретация не является тривиальной и самоочевидной. Заметим также, что динамические системы на некоммутативных многообразиях возникают естественным образом и в рамках некоммутативной дифференциальной геометрии Алана Конна [50].

Отметим, что интерпретация квантовой конформной теории поля, тесно связанной с упомянутыми выше уравнениями кавнтовой теории поля, как бесконечномерной некоммутативной геометрии была дана автором в работе [39]. Аналогичная интерпретация квантовополевой теории взаимодействующих струн содержится в [60]. Однако, подчеркнем, что в конкретных квантовополевых задачах зачастую используются ассоциативные алгебры $\mathfrak{A}$ с фиксированным набором элементов e_i таких, что $T(e_i) = \hat{X}_i(0)$, но не порождаемых ими. Как правило, в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ удобно рассматривать алгебры Вейля от коэффициентов свободных полей (т.н. *представление свободных полей*), универсальные обертывающие алгебры алгебр Каца–Муди или некоторые их q–деформации. Тем самым, подобные конструкции являются естественными альтернативами динамическому освобождению скрытых симметрий при решении динамической обратной задачи теории представлений.

Рассмотрим простейшие примеры динамического освобождения скрытых симметрий.

Пример 1 ($n = 2$, f_1 f_2 – линейные функции). В этом случае система $(*)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{X} = a\hat{X} + b\hat{Y} \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{Y} = c\hat{X} + d\hat{Y} \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ приведена к жордановой нормальной форме. Пусть матрица A диагональна: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Система $(*)$ записывается как

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{X} = \lambda\hat{X} \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{Y} = \mu\hat{Y} \end{cases}$$

Будем искать соотношения на $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ в виде $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{f}(\hat{X}, \hat{Y})$, где $\hat{f}(\hat{X}, \hat{Y}) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_{ij} \hat{X}^i \hat{Y}^j$. Условие сохранения динамикой указанных соотношений имеет вид

$$(\lambda + \mu) \sum_{i \geq o} \sum_{j \geq 0} a_{ij} \hat{X}^i \hat{Y}^j = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_{ij} (i\lambda + j\mu) \hat{X}^i \hat{Y}^j$$

или

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_{ij} (\lambda(i-1) + \mu(j-1)) \hat{X}^i \hat{Y}^j = 0.$$

Как следствие, коэффициенты a_{ij} отличны от нуля только для тех i и j, для которых выражение $\lambda(i-1) + \mu(j-1)$ обращается в нуль.

Возможны пять случаев:

1) Если λ и μ несоизмеримы, или λ μ соизмеримы, одного знака и $\lambda \neq \mu$, то $[\hat{X}, \hat{Y}] = \alpha \hat{X}\hat{Y}$ или, иными словами, $\hat{X}\hat{Y} = q\hat{Y}\hat{X}$ (соотношения двумерной квантовой плоскости [25,70]).
2) Если $\lambda = \mu$, то $[\hat{X}, \hat{Y}] = \alpha\hat{X}^2 + \beta\hat{X}\hat{Y} + \gamma\hat{Y}^2$ (алгебра с квадратичными соотношениями, порожденная двумя образующими [70]).
3) Если $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, то $[\hat{X}, \hat{Y}] = P(\hat{X})\hat{Y}$, или, иными словами, $\hat{Y}\hat{X} = R(\hat{X})\hat{Y}$ (алгебры подобного типа рассматривались в [20]).
4) Если $\lambda + \mu = 0$, то $\hat{X}, \hat{Y}] = \sum_{k \geq 0} a_k \hat{X}^k \hat{Y}^k$. Этот случай отвечает классической задаче Е.Вигнера [84] об однозначности восстановления квантовых коммутационных соотношений по уравнениям квантовой динамики. В частности, данный случай включает т.н. q–коммутационные соотношения $\hat{X}\hat{Y} - q\hat{Y}\hat{X} = 1$ (см., например, [18]).
5) Если λ и μ соизмеримы, $\lambda = l\nu$, $\mu = m\nu$, $l < 0$, $m > 0$, $l + m \neq 0$, то $[\hat{X}, \hat{Y}] = \sum_{k \geq 0} a_k \hat{X}^{1+km} \hat{Y}^{1-kl}$.

Отметим, что динамическое освобождение скрытых симметрий является гамильтоновым лишь в случае канонических коммутационных соотношений, являющихся подслучаем случая 4, и линейных коммутационных соотношений, являющихся подслучаем случая 3 с $R(x) \equiv 1$.

Пусть теперь матрица A имеет вид нетривиальной жордановой клетки $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, изучим, когда существует динамическое освобождение скрытых симметрий с алгеброй $\mathfrak{A}$, задаваемой линейными или квадратичными коммутационными соотношениями на генераторы. Система $(*)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{X} = \lambda\hat{X} \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{Y} = \lambda\hat{Y} + \hat{X} \end{cases}$$

1) При $\lambda \neq 0$ не существует алгебры $\mathfrak{A}$ динамически освобожденных скрытых симметрий с линейными коммутационными соотношениями на генераторы.
2) Квадратичные коммутационные соотношения в алгебре $\mathfrak{A}$ динамически освобожденных скрытых симметрий представляются в виде $[\hat{X}, \hat{Y}] = a\hat{Y}^2$. Соответствующее динамическое освобождение скрытых симметрий не является гамильтоновым.

Пример 2 ($n = 2$, f_1 и f_2 – однородные квадратичные функции). Система $(*)$ имеет вид:

$$(**) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{X} = a\hat{X}^2 + b\frac{\hat{X}\hat{Y}+\hat{Y}\hat{X}}{2} + c\hat{Y}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{Y} = d\hat{X}^2 + e\frac{\hat{X}\hat{Y}+\hat{Y}\hat{Y}}{2} + f\hat{Y}^2 \end{cases}$$

Изучим, когда данная система операторных уравнений допускает динамическое освобождение скрытых симметрий с алгеброй $\mathfrak{A}$, определяющие коммутационные соотношения которой – однородные линейные или квадратичные функции, а также, когда динамическое освобождение скрытых симметрий является гамильтоновым.

1) Система операторных уравнений $(**)$ допускает динамическое освобождение скрытых симметрий с алгеброй $\mathfrak{A}$, определяющие коммутационные соотношения которой линейны, тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} ac + bf + f^2 = 0 \\ a^2 + ae + df = 0 \end{cases}$$
При этом $[\hat{X}, \hat{Y}] = \alpha\hat{X} + \beta\hat{Y}$, и имеет место пропорция $\alpha : \beta = -a : f$. Динамическое освобождение скрытых симметрий гамильтоново, $\hat{H} = p\hat{X}^2 + q\frac{\hat{X}\hat{Y}+\hat{Y}\hat{X}}{2} + r\hat{Y}^2$ и имеет место пропорция $p : q : r = df : af : ac$.
2) Система операторных уравнений $(**)$ допускает динамическое освобождение скрытых симметрий с алгеброй $\mathfrak{A}$, определяющие коммутационные соотношения которой квадратичны, тогда и только

тогда, когда $a:d=b:e=c:f$. При этом $[\hat{X},\hat{Y}]=\alpha\hat{X}^2+\beta\frac{\hat{X}\hat{Y}+\hat{Y}\hat{X}}{2}+\gamma\hat{Y}^2$, и имеют место пропорции $a:d:\alpha=b:e:\beta=c:f:\gamma$. Динамическое освобождение скрытых симметрий гамильтоново, $\hat{H}=p\hat{X}+q\hat{Y}$ и $p:q=-a:d=-b:e=-c:f$.

Отметим, что система $(*)$ допускает динамическое освобождение скрытых симметрий как с линейными, так и с квадратичными определяющими соотношениями в алгебре $\mathfrak{A}$, если $b=-(a+c)$, $d=a$, $e=b$, $f=c$. Линейный случай задается соотношениями $[\hat{X},\hat{Y}]=a\hat{X}+b\hat{Y}$ и гамильтонианом $\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{X}+\hat{Y})^2$, квадратичный – соотношениями $[\hat{X},\hat{Y}]=a\hat{X}^2-(a+c)\frac{\hat{X}\hat{Y}+\hat{Y}\hat{X}}{2}+c\hat{Y}^2$ и гамильтонианом $\hat{H}=\hat{X}-\hat{Y}$.

Интересные возможности возникают в случае системы из трех операторных дифференциальных уравнений с линейной или квадратичной правой частью, однако, он не содержит идеологически ничего принципиально нового, если ограничиваться алгебрами $\mathfrak{A}$ динамически освобожденных скрытых симметрий с линейными или квадратичными перестановочными соотношениями на генераторы.

Отметим, что при любом конечном n исследование возможности динамического освобождения скрытых симметрий, описываемых линейными или квадратичными перестановочными соотношениями, в системах n операторных дифференциальных уравнений с линейной или квадратичной правой частью сводится к вопросу о существовании нетривиальных решений переопределенных систем линейных уравнений с последующей проверкой тождеств Якоби и не представляет теоретических или вычислительных трудностей в отличие от случая сильно нелинейных перестановочных соотношений (см. [12]).

2. Лиевские $\mathfrak{g}$–пучки, ли–допустимые $\mathfrak{g}$–пучки и изотопические пары

2.1. Лиевские $\mathfrak{g}$–пучки и скрытые симметрии [63].

Определение 7.

А. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. *Лиевским $\mathfrak{g}$–пучком* называется $\mathfrak{g}$–модуль W такой, что существует $\mathfrak{g}$–эквивариантное отображение $\mathfrak{g}\otimes\bigwedge^2(W)\mapsto W$, определяющее структуру алгебры Ли в W при зафиксированном первом аргументе; мы будем обозначать полученную операцию $[\cdot,\cdot]_L$, $L\in\mathfrak{g}$.

Б. Семейство (линейное пространство) операторов называется *изокоммутаторной алгеброй операторов*, если существует оператор A, называемый *изотопическим элементом* (ср. напр. [80]) такой, что для любых X и Y из семейства выражение $XAY-YAX$ также принадлежит семейству**.

** Стоит отметить, что изокоммутаторная алгебра операторов как абстрактная алгебра является алгеброй Ли. Сопоставление алгебре Ли изокоммутаторной алгебры операторов называется *изопредставлением* первой.

Отметим, что изотопические элементы для заданного семейства операторов образуют линейное пространство***.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и H – модуль над ней. Если L – элемент $\mathfrak{g}$, то его образ в $\mathrm{End}(H)$ будет обозначен $\pi(L)$. Семейство (линейное пространство) операторов в H инвариантное относительно действия $\mathfrak{g}$ называется *изокоммутаторной алгеброй скрытых симметрий*, если оно является изокоммутаторной алгеброй операторов для любого $\pi(L)$, $L \in \mathfrak{g}$ в качестве изотопического элемента.

B. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и W – лиевский $\mathfrak{g}$–пучок. *Изопредставлением* W называется $\mathfrak{g}$–эквивариантное отображение T из W в $\mathrm{End}(H)$, где H – некоторый $\mathfrak{g}$–модуль такой, что $T([X,Y]_L) = T(X)\pi(L)T(Y) - T(Y)\pi(L)T(X)$. Иными словами, T сопоставляет изокоммутаторную алгебру скрытых симметрий лиевскому $\mathfrak{g}$–пучку W.

Необходимо специально отметить, что рассматриваемый случай линеен, так что лиевский $\mathfrak{g}$–пучок может быть восстановлен по изокоммутаторной алгебре операторов подобно тому, как абстрактная алгебра Ли восстанавливается по коммутаторной алгебре операторов. Иными словами, нет никаких проблем с освобождением скрытых симметрий в рассматриваемой ситуации.

Рассмотрим некоторые примеры, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Теорема 5A [63]:(*Пример 1***).** *Существует единственная структура лиевского $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучка в π_1.*

А именно, если зафиксировать базис m_i ($i = -1,0,1$) в π_1 такой, что $L_i(m_j) = (i-j)m_{i+j}$, то изокоммутаторы в лиевском $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучке имеют вид

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0} = m_{-1} & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}} = 0 & [m_{-1},m_0]_{L_1} = 2m_0 \\
[m_1,m_{-1}]_{L_0} = 0 & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}} = 2m_{-1} & [m_1,m_{-1}]_{L_1} = -2m_1 \\
[m_1,m_0]_{L_0} = m_1 & [m_1,m_0]_{L_{-1}} = 2m_0 & [m_1,m_0]_{L_1} = 0
\end{array}
$$

Пример 2. Пусть $\pi_{1/2}$ – 2–мерное фундаментальное представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Операторы из $\mathrm{End}(\pi_{1/2})$ образуют естественным образом изокоммутаторную алгебру скрытых симметрий. Соответствующий лиевский $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучок реализуется в прямой сумме $\pi_0 \oplus \pi_1$ тривиального и присоединенного представлений $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Если зафиксировать базис m_i в π_1 как выше и элемент c в π_0 (отображаемый в единицу изопредставлением), то изокоммутаторы в лиевском $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучке имеют вид

*** Если A – изотопический элемент для семейства (линейного пространства) операторов и L – некоторый оператор такой, что $\mathrm{ad}\,L$ сохраняет это семейство, то $[L,A]$ также является изотопическим элементом. Также если A и B – два изотопических элемента и X – произвольный оператор из семейства, то $AXB - BXA$ также изотопический элемент. Это свойство называется изотопической двойственностью (см. параграф 2.3.).

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_1}=-\frac{1}{2}c \\
[m_1,m_{-1}]_{L_0}=-\frac{1}{2}c & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [m_1,m_{-1}]_{L_1}=0 \\
[m_1,m_0]_{L_0}=0 & [m_1,m_0]_{L_{-1}}=\frac{1}{2}c & [m_1,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_1]_{L_0}=-m_1 & [c,m_1]_{L_{-1}}=-2m_0 & [c,m_1]_{L_1}=0 \\
[c,m_0]_{L_0}=0 & [c,m_0]_{L_{-1}}=-m_{-1} & [c,m_0]_{L_1}=m_1 \\
[c,m_{-1}]_{L_0}=m_{-1} & [c,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{L_1}=2m_0
\end{array}
$$

Теорема 5Б [63]:(*Пример 3***).** *Существует в точности четыре типа структур лиевского* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$*–пучка в* $\pi_1\oplus\pi_2$*.*

Случай 1: расширенный пример 1.

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0}=am_{-1} & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_1}=2am_0 \\
[m_1,m_{-1}]_{L_0}=0 & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}}=2am_{-1} & [m_1,m_{-1}]_{L_1}=-2am_1 \\
[m_1,m_0]_{L_0}=am_1 & [m_1,m_0]_{L_{-1}}=2am_0 & [m_1,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_1]_{L_0}=0 & [c,m_1]_{L_{-1}}=-2\mu c & [c,m_1]_{L_1}=0 \\
[c,m_0]_{L_0}=\mu c & [c,m_0]_{L_{-1}}=0 & [c,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_{-1}]_{L_0}=0 & [c,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{L_1}=-2\mu c.
\end{array}
$$

Случай 2: пример 2.

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_1}=\lambda c \\
[m_1,m_{-1}]_{L_0}=\lambda c & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [m_1,m_{-1}]_{L_1}=0 \\
[m_1,m_0]_{L_0}=0 & [m_1,m_0]_{L_{-1}}=-\lambda c & [m_1,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_1]_{L_0}=-dm_1 & [c,m_1]_{L_{-1}}=-2dm_0 & [c,m_1]_{L_1}=0 \\
[c,m_0]_{L_0}=0 & [c,m_0]_{L_{-1}}=-dm_{-1} & [c,m_0]_{L_1}=dm_1 \\
[c,m_{-1}]_{L_0}=dm_{-1} & [c,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{L_1}=2dm_0
\end{array}
$$

Случай 3.

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0}=am_{-1} & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_1}=2am_0+\lambda c \\
[m_1,m_{-1}]_{L_0}=\lambda c & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}}=2am_{-1} & [m_1,m_{-1}]_{L_1}=-2am_1 \\
[m_1,m_0]_{L_0}=am_1 & [m_1,m_0]_{L_{-1}}=2am_0+\lambda c & [m_1,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_1]_{L_0}=0 & [c,m_1]_{L_{-1}}=-4ac & [c,m_1]_{L_1}=0 \\
[c,m_0]_{L_0}=2ac & [c,m_0]_{L_{-1}}=0 & [c,m_0]_{L_1}=0 \\
[c,m_{-1}]_{L_0}=0 & [c,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{L_1}=-4ac
\end{array}
$$

Случай 4.

$$
\begin{array}{lll}
[m_{-1},m_0]_{L_0}=am_{-1} & [m_{-1},m_0]_{L_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{L_1}=2am_0\\
[m_1,m_{-1}]_{L_0}=0 & [m_1,m_{-1}]_{L_{-1}}=2am_{-1} & [m_1,m_{-1}]_{L_1}=-2am_1\\
[m_1,m_0]_{L_0}=am_1 & [m_1,m_0]_{L_{-1}}=2am_0 & [m_1,m_0]_{L_1}=0\\
[c,m_1]_{L_0}=-dm_1 & [c,m_1]_{L_{-1}}=-2dm_0 & [c,m_1]_{L_1}=0\\
[c,m_0]_{L_0}=0 & [c,m_0]_{L_{-1}}=-dm_{-1} & [c,m_0]_{L_1}=dm_1\\
[c,m_{-1}]_{L_0}=dm_{-1} & [c,m_{-1}]_{L_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{L_1}=2dm_0.
\end{array}
$$

Пример 4. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра с инволюцией $*$, $\mathfrak{g}=\{A\in\mathcal{A}:A^*=-A\}$ – алгебра Ли. Пусть $W=\{B\in\mathcal{A}:B^*=B\}$, тогда в W задана естественная структура изокоммутаторной алгебры скрытых симметрий.

В частности, пусть $\mathcal{A}=\mathrm{End}(\pi_1)$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})\subset\mathcal{A}$ – множество кососимметрических матриц 3×3 ($\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$), W – множество симметрических матриц 3×3 (отметим, что $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ действует в W и W изоморфно $\pi_0\oplus\pi_2$ как $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–модуль). Таким образом, W является изокоммутаторной алгеброй скрытых симметрий и, следовательно, $\pi_0\oplus\pi_2$ наделяется структурой лиевского $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучка.

Эта конструкция лиевского $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучка обобщается на прямые суммы $\bigoplus_{i=1}^k\pi_{2i}\simeq S^2(\pi_k)$.

Замечание 3. π_2 не допускает структуру лиевского $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучка.

Пример 5 (Геометрический пример лиевского $\mathfrak{g}$–пучка). Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. $C^\infty(\mathcal{M})$ является $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$–пучком.

2.2. Ли–допустимые $\mathfrak{g}$–пучки [61].

Определение 8.

А. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *ли–допустимой* [17,64,65], если ее коммутаторная алгебра $\mathfrak{A}^{(-)}$ является алгеброй Ли. Основным примером ли–допустимой алгебры является произвольная ассоциативная алгебра, снабженная операцией $(X,Y)\mapsto XRY-YSX$ (для произвольных фиксированных R и S).

Б. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. *Ли–допустимым $\mathfrak{g}$–пучком* называется $\mathfrak{g}$–модуль W такой, что существует $\mathfrak{g}$–эквивариантное отображение $(\mathbf{1}\oplus\mathfrak{g})\otimes T^2(W)\mapsto W$, задающее структуру ли–допустимой алгебры в W, если первые аргументы зафиксированы. Будем обозначать полученную операцию $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(c,L)}$, $(c,L)\in\mathbf{1}\oplus\mathfrak{g}$ или кратко $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$, если $c=1$. W называется *ли–допустимым $\mathfrak{g}$–пучком первого рода*, если операция $X\circ_L Y=\frac{1}{2}(\langle X,Y\rangle_L-\langle Y,X\rangle_L)$ не зависит от L и *ли–допустимым $\mathfrak{g}$–пучком второго рода*, если операция $[X,Y]_L=\langle X,Y\rangle_L-\langle Y,X\rangle_L$ не зависит от L.

Ли–допустимый $\mathfrak{g}$–пучок W называется *квадратичным* (*однородным* или *неоднородным*, соответственно), если и только если (1) существует $\mathfrak{g}$–подмодуль W_0 (*координатная база*) в W такой, что отображение из $S^{\cdot}(W_0)$ в W, определяемое с помощью симметризации Вейля, является $\mathfrak{g}$–эквивариантным изоморфизмом; (2) в базисе w_m в W_0 выполняются соотношения $[w_i,w_j]_L=S^{kl}_{ij}w_k\circ_L w_l$ или $[w_i,w_j]_L=S^{kl}_{ij}w_k\circ_L w_l+R^k_{ij}w_k$, соответственно.

B. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. *Изопредставлением* ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка W первого рода называется $\mathfrak{g}$–эквивариантное отображение из W в $\mathrm{End}(H)$, где H – некоторый $\mathfrak{g}$–модуль ($\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{End}(H)$) такой, что $T([X,Y]_L) = T(X)\pi(L)T(Y) - T(Y)\pi(L)T(X)$, $T(X \circ Y) = \frac{1}{2}(T(X)T(Y) + T(Y)T(X))$. *Изопредставлением* ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка W второго рода называется $\mathfrak{g}$–эквивариантное отображение из W в $\mathrm{End}(H)$, где H – некоторый $\mathfrak{g}$–модуль ($\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{End}(H)$) такой, что $T(X \circ_L Y) = \frac{1}{2}(T(X)\pi(L)T(Y) + T(Y)\pi(L)T(X))$ и $T([X,Y]) = [T(X), T(Y)]$.

Пример 6 (ср. пример 4 выше). Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра с инволюцией $*$, $\mathfrak{g} = \{A \in \mathcal{A} : A^* = -A\}$. Пространство $W = \{B \in \mathcal{A} : B^* = B\}$ допускает естественную структуру ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка первого рода, в то время как сама алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает естественную структуру ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка второго рода.

Таким образом, классические алгебры Ли $\mathfrak{g}$ наделяются естественными структурами ли–допустимых $\mathfrak{g}$–пучков.

В частности, на π_1 задана структура ли–допустимого $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучка второго рода, в то время как на $\pi_0 \oplus \pi_2$ задана структура ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка первого рода. Более того, структуры ли–допустимых $\mathfrak{g}$–пучков первого рода определены в $\bigoplus_{i=0}^{k} \pi_{2i}$, в то время как структуры ли–допустимых $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучков второго рода определены в $\bigoplus_{i=0}^{k} \pi_{2i+1}$.

Вопрос 2:. Существуют ли квадратичные ли–допустимые $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучки первого и второго рода с π_2 в качестве координатной базы, которые допускают изопредставления, сопоставляющие элементам координатной базы тензорные операторы D_i^2 $(-2 \le i \le 2)$ в модулях Верма V_h?

Пример 7 (Геометрический пример ли–допустимого $\mathfrak{g}$–пучка). Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Пространство дифференциальных операторов $\mathrm{DOP}(\mathcal{M})$ на $\mathcal{M}$ является ли–допустимым $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$–пучком первого рода.

2.3. Изотопические пары [41].

Определение 9А. Пара (V_1, V_2) линейных пространств называется *изотопической парой*, если и только если определены два отображения $m_1 : V_2 \otimes \bigwedge^2 V_1 \mapsto V_1$ и $m_2 : V_1 \otimes \bigwedge^2 V_2 \mapsto V_2$ такие, что операции $(X,Y) \mapsto [X,Y]_A = m_1(A,X,Y)$ $(X, Y \in V_1,\ A \in V_2)$ и $(A,B) \mapsto [A,B]_X = m_2(X,A,B)$ $(A, B \in V_2,\ X \in V_1)$ удовлетворяют тождествам Якоби при всех значениях подстрочного параметра (эти операции называются *изокоммутаторами*, а подстрочные параметры – *изотопическими элементами*) и согласованы между собой, т.е. выполняются тождества

$$\begin{aligned}[X,Y]_{[A,B]_Z} =& \tfrac{1}{2}([[X,Z]_A,Y]_B + [[X,Y]_A,Z]_B + [[Z,Y]_A,X]_B - \\ & [[X,Z]_B,Y]_A - [[X,Y]_B,Z]_A - [[Z,Y]_B,X]_A)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}[A,B]_{[X,Y]_C} =& \tfrac{1}{2}([[A,C]_X,B]_Y + [[A,B]_X,C]_Y + [[C,B]_X,A]_Y - \\ & [[A,C]_Y,B]_X - [[A,B]_Y,C]_X - [[C,B]_Y,A]_X)\end{aligned}$$

где $X, Y, Z \in V_1,\ A, B, C \in V_2$.

Обсудим это определение.

Во-первых, оно может рассматриваться как результат аксиоматизации следующей конструкции: пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра, например, матричная, V_1, V_2 – два линейных подпространства в ней такие, что V_1 замкнуто относительно изокоммутаторов $(X, Y) \mapsto [X, Y]_A = XAY - YAX$ с изотопическими элементами A из V_2, в то время как V_2 замкнуто относительно изокоммутаторов $(A, B) \mapsto [A, B]_X = AXB - BXA$ с изотопическими элементами X из V_1.

Замечание 4. Пусть H – (конечномерное) линейное пространство. Если $\mathcal{A}$ – подпространство в $\mathrm{End}(H)$, положим $\mathcal{A}^{\mathfrak{i}} = \{X \in \mathrm{End}(H), \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, AXB - BXA \in \mathcal{A}\}$. Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\mathfrak{ii}}$ и $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathfrak{i}})$ является изотопической парой.

Достаточно интересно вычленить наиболее общую формулировку данной конструкции. А именно, пусть $[\cdot,\cdot]_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ – линейное семейство согласованных скобок Ли на V. Когда скобка $[\cdot,\cdot]_{\alpha \underset{Z}{\Diamond} \beta}$ $(Z \in V)$, определенная на V как

$$[X, Y]_{\alpha \underset{Z}{\Diamond} \beta} = \tfrac{1}{2}([[X, Z]_A, Y]_B + [[X, Y]_A, Z]_B + [[Z, Y]_A, X]_B - (\alpha \longleftrightarrow \beta))$$

является скобкой Ли, согласованной со скобками $[\cdot,\cdot]_\alpha$ и $[\cdot,\cdot]_\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{A})$?

Конечно же, $\mathfrak{g}$–эквивариантный случай представляет наибольший интерес, но автор не знает ответа на сформулированный выше вопрос. Существование $\Diamond$–операции на пространстве согласованных скобок Ли зависит от справедливости следующей гипотезы: пусть $[\cdot,\cdot]_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ – $\Diamond$–замкнутое линейное семейство согласованных скобок Ли на линейном пространстве V, тогда существует линейное пространство H и два линейных отображения $T \in \mathrm{Hom}(V; \mathrm{End}(H))$ и $Q \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}; \mathrm{End}(H))$ такие, что $T([X, Y]_\alpha) = T(X)Q(\alpha)T(Y) - T(Y)Q(\alpha)T(X)$.

Замечание 5. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}(H)$, $\dim \mathcal{A} = n$, Lie_n – пространство всех алгебр Ли размерности n, тогда существует естественное отображение $\mathcal{L} : \mathcal{A}^{\mathfrak{i}} \mapsto \mathrm{Lie}_n$. Отметим, что $\mathrm{card}\,\mathcal{L}(\mathcal{A}^{\mathfrak{i}})$ может отличаться от 1, так что $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$ не совпадают для различных X и Y. Это означает, что изокоммутаторы $[\cdot,\cdot]_X$ и $[\cdot,\cdot]_Y$ определяют, вообще говоря, неизоморфные структуры алгебр Ли на пространстве $\mathcal{A}$ (которые, однако, в частных случаях могут совпадать).

Во-вторых, имеет смысл сравнить определение 1 с определением антийордановых пар [52,53].

Определение 9Б (ср. с определением антийордановой тройной системы в [79])**.** Пара (V_1, V_2) линейных пространств называется *антийордановой парой*, если и только если определены два отображения $m_1 : V_2 \otimes \bigwedge^2 V_1 \mapsto V_1$ и $m_2 : V_1 \otimes \bigwedge^2 V_2 \mapsto V_2$ такие, что операции $(X, Y) \mapsto [X, Y]_A = m_1(A, X, Y)$ $(X, Y \in V_1,\ A \in V_2)$ и $(A, B) \mapsto [A, B]_X = m_2(X, A, B)$ $(A, B \in V_2,\ X \in V_1)$ согласованы между собой следующим образом

$$[X, Y]_{[A,B]_Z} = [[X, Z]_A, Y]_B + [[Z, Y]_A, X]_B - [[X, Y]_B, Z]_A$$

$$[A, B]_{[X,Y]_C} = [[A, C]_X, B]_Y + [[C, B]_X, A]_Y - [[A, B]_Y, C]_X$$

где $X, Y, Z \in V_1,\ A, B, C \in V_2$.

Легко убедиться, что изотопические пары всегда являются антийордановыми (достаточно линеаризовать тождество Якоби по подстрочному параметру), таким образом, изотопические пары – частный случай антийордановых пар. В характеристике два существуют антийордановы пары, не являющиеся изотопическими. В характеристике нуль изотопические и антийордановы пары неразличимы.

Отметим, что антийордановы пары (антийордановы тройные системы) являются нечетными аналогами хорошо известных йордановых пар [48,68, 71] (йордановых тройных систем [48,58,72]).

Антийордановы пары тесно связаны с (поляризованными) антилиевскими тройными системами и супералгебрами Ли [53,54] (см. также [78]). А именно,

Определение 9B. Тернарная алгебра V с произведением $[xyz]$ называется *антилиевской тройной системой*, если и только если

$$\begin{aligned} &(1) \quad [xyz] = [xzy], \\ &(2) \quad [xyz] + [zxy] + [yzx] = 0, \\ &(3) \quad [[xyz]uv] = [[xuv]yz] + [x[yvu]z] + [xy[zuv]]. \end{aligned}$$

Антилиевская тройная система V называется *поляризованной*, если и только если $V = V_1 \oplus V_2$ и $[xyz] = 0$ для $y, z \in V_1$ или $y, z \in V_2$.

Если V – антилиевская тройная система, положим $R_{yz} \in \mathrm{End}(V)$: $R_{yz}x = [xyz]$. Операторы R_{yz} замкнуты относительно коммутаторов, так что $\mathfrak{g}_0(V) = \mathrm{spin}(R_{yz}; y, z \in V)$ является алгеброй Ли. Пространство $\mathfrak{g}_0(V) \oplus V$ наделяется естественной структурой супералгебры Ли [21,23,65, 82] с четной частью $\mathfrak{g}_0(V)$ и нечетной частью V [53]. Обозначим ее $\mathfrak{g}(V)$. Поляризованным антилиевским тройным системам $V = V_1 \oplus V_2$ отвечают поляризованные супералгебры Ли $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{g}_0(V) \oplus (V_1 \oplus V_2)$: $[V_i, V_i]_+ = 0$, $[\mathfrak{g}(V), V_i]_- \subseteq V_i$ (иногда предполагается, что $V_2 \simeq V_1^*$ как $\mathfrak{g}_0(V)$–модули, однако, мы не будем этого делать).

Произвольная антийорданова пара (и, в частности, изотопическая пара) наделяется структурой поляризованной антилиевской тройной системы. А именно, положим $[xyz] = [z, x]_y$ (если z принадлежит тому же пространству V_i что и x) и $[y, x]_z$ (если y принадлежит тому же пространству V_i что и x).

Предъявим иллюстрацию к конструкции супералгебры Ли по изотопической паре.

Пример: пусть H_1 и H_2 - два линейных пространства, $(\mathrm{Hom}(H_1, H_2);$ $\mathrm{Hom}(H_2, H_1))$ – изотопическая пара, соответствующая супералгебра Ли изоморфна $\mathfrak{gl}(n|m)$, $n = \dim H_1$, $m = \dim H_2$. В частности, *операторной* *изотопической паре* $(\mathrm{End}(H), \mathrm{End}(H))$ отвечает супералгебра Ли $\mathfrak{gl}(n|n)$, $n = \dim(H)$.

Разберем примеры изотопических пар.

Во-первых, если $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, то пара $(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ наделяется естественной структурой изотопической пары.

Во-вторых, интересные изотопические пары могут быть построены по некоторым лиевским $\mathfrak{g}$–пучкам.

Пример 1.. Рассмотрим лиевский $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучок в π_1 с изокоммутаторами

$$
(1)\qquad
\begin{array}{lll}
[m_{-1}, m_0]_{l_0} = m_{-1} & [m_{-1}, m_0]_{l_{-1}} = 0 & [m_{-1}, m_0]_{l_1} = 2m_0 \\
[m_1, m_{-1}]_{l_0} = 0 & [m_1, m_{-1}]_{l_{-1}} = 2m_{-1} & [m_1, m_{-1}]_{l_1} = -2m_1 \\
[m_1, m_0]_{l_0} = m_1 & [m_1, m_0]_{l_{-1}} = 2m_0 & [m_1, m_0]_{l_1} = 0
\end{array}
$$

где l_i $(i = -1, 0, 1)$ – генераторы $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ $([l_i, l_j] = (i-j)l_{i+j})$, m_i $(i = -1, 0, 1)$ образуют базис в π_1 $(l_i(m_j) = (i-j)m_{i+j})$. В силу изотопической двойственности изотопические элементы сами замкнуты относительно изокоммутаторов:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{lll}
[l_{-1}, l_0]_{m_0} = -l_{-1} & [l_{-1}, l_0]_{m_{-1}} = 0 & [l_{-1}, l_0]_{m_1} = -2l_0 \\
[l_1, l_{-1}]_{m_0} = 0 & [l_1, l_{-1}]_{m_{-1}} = -2l_{-1} & [l_1, l_{-1}]_{m_1} = 2l_1 \\
[l_1, l_0]_{m_0} = -l_1 & [l_1, l_0]_{m_{-1}} = -2l_0 & [l_1, l_0]_{m_1} = 0
\end{array}
$$

Легко видеть, что изокоммутаторы (1) и (2) определяют структуру изотопической пары в $\pi_1 \oplus \pi_1$. Обозначим первое слагаемое π_1^+ и второе – π_1^-.

Удобно рассмотреть компактную вещественную форму изотопической пары (π_1^+, π_1^-). Обозначим

$$
\begin{gathered}
l_x = \tfrac{i}{2}(l_1 - l_{-1}), \quad l_y = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_{-1}), \quad l_z = il_0 \\
m_x = \tfrac{i}{2}(m_1 - m_{-1}), \quad m_y = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_{-1}), \quad m_z = im_0,
\end{gathered}
$$

тогда

$$
\begin{aligned}
[m_i, m_j]_{l_k} &= \delta_{ik} m_j - \delta_{jk} m_i \\
[l_i, l_j]_{m_k} &= \delta_{jk} l_i - \delta_{ik} l_j.
\end{aligned}
$$

Пример 2. Изокватернионная пара.

Рассмотрим лиевский $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучок примера 2. Он реализуется в прямой сумме $\pi_0\oplus\pi_1$ тривиального и присоединенного представлений $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Зафиксируем базис m_i в π_1 и элемент c в π_0, изокоммутаторы в лиевском $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучке имеют вид

$$\begin{array}{ccc}
[m_{-1},m_0]_{l_0}=0 & [m_{-1},m_0]_{l_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{l_1}=-\frac{1}{2}c \\
[m_1,m_{-1}]_{l_0}=-\frac{1}{2}c & [m_1,m_{-1}]_{l_{-1}}=0 & [m_1,m_{-1}]_{l_1}=0 \\
[m_1,m_0]_{l_0}=0 & [m_1,m_0]_{l_{-1}}=\frac{1}{2}c & [m_1,m_0]_{l_1}=0 \\
[c,m_1]_{l_0}=-m_1 & [c,m_1]_{l_{-1}}=-2m_0 & [c,m_1]_{l_1}=0 \\
[c,m_0]_{l_0}=0 & [c,m_0]_{l_{-1}}=-m_{-1} & [c,m_0]_{l_1}=m_1 \\
[c,m_{-1}]_{l_0}=m_{-1} & [c,m_{-1}]_{l_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{l_1}=2m_0
\end{array}$$

Изотопическая пара по указанному лиевскому $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–пучку строится аналогично примеру 1. Она реализуется в $(\pi_0\oplus\pi_1,\pi_0\oplus\pi_1)$ и изокоммутаторы имеют вид

$$\begin{array}{cccc}
[m_{-1},m_0]_{l_0}=0 & [m_{-1},m_0]_{l_{-1}}=0 & [m_{-1},m_0]_{l_1}=-\frac{1}{2}c & [m_{-1},m_0]_d=m_{-1} \\
[m_1,m_{-1}]_{l_0}=-\frac{1}{2}c & [m_1,m_{-1}]_{l_{-1}}=0 & [m_1,m_{-1}]_{l_1}=0 & [m_1,m_{-1}]_d=2m_0 \\
[m_1,m_0]_{l_0}=0 & [m_1,m_0]_{l_{-1}}=\frac{1}{2}c & [m_1,m_0]_{l_1}=0 & [m_1,m_0]_d=m_1 \\
[c,m_1]_{l_0}=-m_1 & [c,m_1]_{l_{-1}}=-2m_0 & [c,m_1]_{l_1}=0 & [c,m_1]_d=0 \\
[c,m_0]_{l_0}=0 & [c,m_0]_{l_{-1}}=-m_{-1} & [c,m_0]_{l_1}=m_1 & [c,m_0]_d=0 \\
[c,m_{-1}]_{l_0}=m_{-1} & [c,m_{-1}]_{l_{-1}}=0 & [c,m_{-1}]_{l_1}=2m_0 & [c,m_{-1}]_d=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
[l_{-1},l_0]_{m_0}=0 & [l_{-1},l_0]_{m_{-1}}=0 & [l_{-1},l_0]_{m_1}=-\frac{1}{2}d & [l_{-1},l_0]_c=l_{-1} \\
[l_1,l_{-1}]_{m_0}=-\frac{1}{2}d & [l_1,l_{-1}]_{m_{-1}}=0 & [l_1,l_{-1}]_{m_1}=0 & [l_1,l_{-1}]_c=2l_0 \\
[l_1,l_0]_{m_0}=0 & [l_1,l_0]_{m_{-1}}=\frac{1}{2}d & [l_1,l_0]_{m_1}=0 & [l_1,l_0]_c=l_1 \\
[d,l_1]_{m_0}=-l_1 & [d,l_1]_{m_{-1}}=-2l_0 & [d,l_1]_{m_1}=0 & [d,l_1]_c=0 \\
[d,l_0]_{m_0}=0 & [d,l_0]_{m_{-1}}=-l_{-1} & [d,l_0]_{m_1}=l_1 & [d,l_0]_c=0 \\
[d,l_{-1}]_{m_0}=l_{-1} & [d,l_{-1}]_{m_{-1}}=0 & [d,l_{-1}]_{m_1}=2l_0 & [d,l_{-1}]_c=0
\end{array}$$

где d – элемент в π_0–слагаемом второго пространства изотопической пары.

Рассмотрим компактную вещественную форму указанной изотопической пары, а именно, положим

$$l_x=\tfrac{i}{2}(l_1-l_{-1}),\quad l_y=\tfrac{1}{2}(l_1+l_{-1}),\quad l_z=il_0$$
$$m_x=\tfrac{i}{2}(m_1-m_{-1}),\quad m_y=\tfrac{1}{2}(m_1+m_{-1}),\quad m_z=im_0,$$

как выше. Изокоммутационные соотношения примут вид

$$\begin{array}{llll}
[m_\alpha,m_\beta]_{l_\gamma}=-\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}c, & [m_\alpha,m_\beta]_d=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}m_\gamma, & [c,m_\beta]_{l_\alpha}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}m_\gamma, & [c,m_\alpha]_d=0, \\
[l_\alpha,l_\beta]_{m_\gamma}=-\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}d, & [l_\alpha,l_\beta]_c=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}l_\gamma, & [d,l_\beta]_{m_\alpha}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}l_\gamma, & [d,l_\alpha]_c=0.
\end{array}$$

Построенная вещественная изотопическая пара допускает изящную реализацию в терминах изокватернионов. Изокватернионы получаются из обычных путем перехода к умножению $(h_1, h_2) \mapsto h_1 *_{h^\circ} h_2 = h_1 h^\circ h_2$, где h° – фиксированный кватернион (изотопический элемент). Две копии изокватернионов, предоставляющие друг другу изотопические элементы, образуют рассмотренную изотопическую пару после перехода к изокоммутаторам: $[h_1, h_2]_{h^\circ} = h_1 *_{h^\circ} h_2 - h_2 *_{h^\circ} h_1$.

В-третьих, существуют и другие конструкции изотопических пар, некоторые из них приведены ниже.

Пример 3..

Случай A.

Рассмотрим стандартное представление алгебры Гейзенберга с тремя генераторами p, q и r ($[p,q] = r$, $[p,r] = [q,r] = 0$) матрицами 3×3:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство допустимых изотопических элементов порождается тремя генераторами a, b и c, представленными матрицами

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изокоммутаторы имеют вид

$$\begin{array}{lll} [p,q]_a = 0 & [p,q]_b = 0 & [p,q]_c = r \\ [p,r]_a = r & [p,r]_b = 0 & [p,r]_c = 0 \\ [q,r]_a = 0 & [q,r]_b = -r & [q,r]_c = 0 \end{array}$$

Элементы a, b и c в свою очередь замкнуты относительно изокоммутаторов с изотопическими элементами p, q и r в силу изотопической двойственности:

$$\begin{array}{lll} [a,b]_p = 0 & [a,b]_q = 0 & [a,b]_r = c \\ [a,c]_p = c & [a,c]_q = 0 & [b,c]_r = 0 \\ [b,c]_p = 0 & [b,c]_q = -c & [a,c]_r = 0 \end{array}$$

Линейные пространства, натянутые на p, q, r и a, b, c образуют изотопическую пару.

Случай Б.

Рассмотрим другое стандартное представление алгебры Гейзенберга дифференциальными операторами

$$p = \partial_x, \qquad q = x, \qquad r = 1.$$

Линейное пространство допустимых изотопических элементов порождается тремя генераторами a, b и c, которые представляются теми же операторами, что и p, q и r, а именно

$$a = x, \qquad b = \partial_x, \qquad c = 1.$$

Изокоммутаторы имеют вид

$$\begin{array}{lll} [p,q]_a = 2q & [p,q]_b = 2p & [p,q]_c = r \\ [p,r]_a = r & [p,r]_b = 0 & [p,r]_c = 0 \\ [q,r]_a = 0 & [q,r]_b = -r & [q,r]_c = 0 \end{array}$$

Элементы a, b и c в свою очередь замкнуты относительно изокоммутаторов с изотопическими элементами p, q и r в силу изотопической двойственности:

$$\begin{array}{lll} [a,b]_p = -2b & [a,b]_q = -2a & [a,b]_r = -c \\ [a,c]_p = -c & [a,c]_q = 0 & [b,c]_r = 0 \\ [b,c]_p = 0 & [b,c]_q = c & [a,c]_r = 0 \end{array}$$

Линейные пространства, натянутые на p, q, r и a, b, c, образуют изотопическую пару.

Общий случай.

В общем случае изокоммутаторы имеют вид

$$\begin{array}{lll} [p,q]_a = 2\varepsilon_1 q & [p,q]_b = 2\varepsilon_1 p & [p,q]_c = \varepsilon_3 r \\ [p,r]_a = \varepsilon_2 r & [p,r]_b = 0 & [p,r]_c = 0 \\ [q,r]_a = 0 & [q,r]_b = -\varepsilon_2 r & [q,r]_c = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} [a,b]_p = 2\tilde\varepsilon_1 b & [a,b]_q = 2\tilde\varepsilon_1 a & [a,b]_r = \tilde\varepsilon_3 c \\ [a,c]_p = \tilde\varepsilon_2 c & [a,c]_q = 0 & [b,c]_r = 0 \\ [b,c]_p = 0 & [b,c]_q = -\tilde\varepsilon_2 c & [a,c]_r = 0 \end{array}$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \tilde\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 - \tilde\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \tilde\varepsilon_1 \\ \varepsilon_3\tilde\varepsilon_3 - \varepsilon_2\tilde\varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(V_1 \oplus V_2)$ порождается (для ε_i, $\tilde\varepsilon_i$ общего положения) 6 операторами $R_{p,a}$, $R_{p,b}$, $R_{q,a}$, $R_{q,b}$, $R_{r,b} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} R_{p,c}$, $R_{r,a} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} R_{q,c}$, которые имеют вид

$$
R_{p,a} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad R_{p,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
R_{q,a} = \begin{pmatrix} 0 & -2\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{q,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix},
$$

$$
R_{p,c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{q,c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}
$$

в базисе (q, p, r) и

$$
R_{p,a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\varepsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}, \quad R_{p,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
R_{q,a} = \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde{\varepsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{q,b} = \begin{pmatrix} -2\tilde{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{\varepsilon}_2 \end{pmatrix},
$$

$$
R_{p,c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\varepsilon}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{q,c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

в базисе (a, b, c).

Супералгебра Ли $\mathfrak{g}(V_1 \oplus V_2)$ имеет (супер)размерность $(6|6)$ и порождается $R_{p,a}$, $R_{p,b}$, $R_{q,a}$, $R_{q,b}$, $R_{p,c}$, $R_{q,c}$, p, q, r, a, b, c с (супер)коммутационными соотношениями [64]

$$
\begin{gathered}
[q,p]_+ = [q,r]_+ = [p,r]_+ = [a,b]_+ = [a,c]_+ = [b,c]_+ = [r,c]_+ = 0, \\
[p,a]_+ = R_{p,a}, \ [q,a]_+ = R_{q,a}, \ [p,b]_+ = R_{p,b}, \\
[q,b]_+ = R_{q,b}, \ [p,c]_+ = R_{p,c}, \ [q,c]_+ = R_{q,c}, \\
[r,a]_+ = \tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} R_{q,c}, \ [r,b]_+ = \tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} R_{p,c};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[R_{p,a}, q]_- = 2\varepsilon_1 q,\ [R_{p,a}, p]_- = 0,\ [R_{p,a}, r]_- = \varepsilon_2 r,\\
[R_{q,a}, q]_- = 0,\ [R_{q,a}, p]_- = -2\varepsilon_1 q,\ [R_{q,a}, r]_- = 0,\\
[R_{p,b}, q]_- = 2\varepsilon_1 p,\ [R_{p,b}, p]_- = 0,\ [R_{p,b}, r]_- = 0,\\
[R_{q,b}, q]_- = 0,\ [R_{q,b}, p]_- = -2\varepsilon_1 p,\ [R_{q,b}, r]_- = -\varepsilon_2 r,\\
[R_{p,c}, q]_- = \varepsilon_3 r,\ [R_{p,c}, p]_- = 0,\ [R_{p,c}, r]_- = 0,\\
[R_{q,c}, q]_- = 0,\ [R_{q,c}, p]_- = -\varepsilon_3 r,\ [R_{q,c}, r]_- = 0,\\
[R_{p,a}, a]_- = 0,\ [R_{p,a}, b]_- = 2\tilde{\varepsilon}_1 b,\ [R_{p,a}, c]_- = \tilde{\varepsilon}_2 c,\\
[R_{q,a}, a]_- = 0,\ [R_{q,a}, b]_- = 2\tilde{\varepsilon}_1 a,\ [R_{q,a}, c]_- = 0,\\
[R_{p,b}, a]_- = -2\tilde{\varepsilon}_1 b,\ [R_{p,b}, b]_- = 0,\ [R_{p,b}, c]_- = 0,\\
[R_{q,b}, a]_- = -2\tilde{\varepsilon}_1 a,\ [R_{q,b}, b]_- = 0,\ [R_{q,b}, c]_- = -\tilde{\varepsilon}_2 c,\\
[R_{p,c}, a]_- = -\tilde{\varepsilon}_2 c,\ [R_{p,c}, b]_- = 0,\ [R_{p,c}, c]_- = 0,\\
[R_{q,c}, a]_- = 0,\ [R_{q,c}, b]_- = \tilde{\varepsilon}_2 c,\ [R_{q,c}, c]_- = 0;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[R_{p,a}, R_{p,b}]_- = -2\varepsilon_1 R_{p,b},\ [R_{p,a}, R_{q,a}]_- = 2\varepsilon_1 R_{q,a},\ [R_{p,a}, R_{p,b}]_- = 0,\\
[R_{p,a}, R_{p,c}]_- = \tilde{\varepsilon}_2 R_{p,c},\ [R_{p,a}, R_{q,c}]_- = \varepsilon_2 R_{q,c},\ [R_{p,b}, R_{q,a}]_- = 2\varepsilon_1 (R_{q,b} + R_{p,a}),\\
[R_{p,b}, R_{q,b}]_- = 2\varepsilon_1 R_{p,b},\ [R_{p,b}, R_{p,c}]_- = 0,\ [R_{p,b}, R_{q,c}]_- = 2\varepsilon_1 R_{p,c},\\
[R_{q,a}, R_{q,b}]_- = -2\varepsilon_1 R_{q,a},\ [R_{q,a}, R_{p,c}]_- = -2\varepsilon_1 R_{p,c},\ [R_{q,a}, R_{q,c}]_- = 0,\\
[R_{q,b}, R_{p,c}]_- = -\varepsilon_2 R_{p,c},\ [R_{q,b}, R_{q,c}]_- = -\tilde{\varepsilon}_2 R_{q,c},\ [R_{p,c}, R_{q,c}]_- = 0.
\end{gathered}
$$

Четная часть супералгебры Ли $\mathfrak{g}(V_1 \oplus V_2)$ изоморфна полупрямой сумме $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathbb{C}^2$. С другой стороны $\mathfrak{g}(V_1 \oplus V_2)$ может рассматриваться как полупрямая сумма супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(2|1, \mathbb{C})$, порожденной $R_{p,a}$, $R_{p,b}$, $R_{q,a}$, $R_{q,b}$, p, q, a, b, и $(2|2)$–мерного векторного суперпространства $V^{2|2}$, натянутого на $R_{p,c}$, $R_{q,c}$, r, c.

Пример 4. Одна из наиболее интересных изотопических пар связана с симметрическими и кососимметрическими матрицами $n \times n$. Рассмотрим простейший случай $n = 3$. Введем базисы:

$$
l_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

и

$$
m_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
m_{xx} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{zz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Элементы l_a задают базис в пространстве кососимметрических матриц, а m_{ab} – в пространстве симметрических матриц. Изокоммутаторы имеют вид

$$\begin{aligned}
[m_{ab}, m_{cd}]_{l_e} &= \epsilon_{ace} m_{bd} + \epsilon_{ade} m_{bc} + \epsilon_{bce} m_{ad} + \epsilon_{bde} m_{ac},\\
[l_a, l_b]_{m_{cd}} &= \epsilon_{abc} l_d + \epsilon_{abd} l_c,
\end{aligned}$$

где ϵ_{abc} – полностью антисимметрический тензор.

Рассмотрим комплексификацию этой изотопической пары и базис l_k $(k = -1, 0, 1)$, w_j $(j = -2, -1, 0, 1, 2)$, κ в ней:

$$\begin{gathered}
l_{-1} = l_y + il_x, \quad l_0 = -\, il_z, \quad l_1 = l_y - il_x,\\
w_{-2} = \tfrac{1}{2}(m_{yy} - m_{xx}) - im_{xy}, \quad w_{-1} = \tfrac{1}{2} m_{xz} - \tfrac{i}{2} m_{yz},\\
w_0 = \tfrac{1}{6}(m_{xx} + m_{yy} - 2m_{zz}),\\
w_1 = \tfrac{1}{2} m_{xz} + \tfrac{i}{2} m_{yz}, \quad w_2 = \tfrac{1}{2}(m_{yy} - m_{xx}) + im_{xy},\\
\kappa = \tfrac{1}{2}(m_{xx} + m_{yy} + m_{zz}).
\end{gathered}$$

Написание явных формул для изокоммутаторов в этом базисе может быть рассмотрено как упражнение для читателя.

Пример 5. Бесконечномерная "геометрическая" изотопическая пара.

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное гладкое многообразие, тогда $(\mathrm{Vect}(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$ – изотопическая пара с естественными изокоммутаторами:

$$\begin{aligned}
[u^a(\xi)\partial_a, v^b(\xi)\partial_b]_{f(\xi)} =& u^a(\xi)\partial_a(f(\xi)v^b(\xi))\partial_b - v^b(\xi)\partial_b(f(\xi)u^a(\xi))\partial_a,\\
[f(\xi), g(\xi)]_{u^a(\xi)\partial_a} =& f(\xi)u^a(\xi)\partial_a g(\xi) - g(\xi)u^a(\xi)\partial_a f(\xi);
\end{aligned}$$

где $\xi \in \mathcal{M}$, $u^a(\xi)\partial_a, v^a(\xi)\partial_a \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, $f(\xi), g(\xi) \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Наиболее интересен случай $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1$. Изокоммутаторы в изотопической паре $(\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1), C^\infty(\mathbb{S}^1))$ имеют изющный симметрический вид

$$\begin{aligned}
[u(t)\partial_t, v(t)\partial_t]_{f(t)} =& f(t)(u(t)v'(t) - v(t)u'(t))\partial_t,\\
[f(t), g(t)]_{u(t)\partial_t} =& u(t)(f(t)g'(t) - g(t)f'(t)),
\end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{S}^1$, $u(t)\partial_t, v(t)\partial_t \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$, $f(t), g(t) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

К сожалению, не известно описание нетривиальных центральных расширений этой пары (ср.[34]).

Замечание 4. Алгебра Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1)$ группы Ли $\mathbf{Aff}(\mathbb{C}^1)$ аффинных преобразований $\mathbb{C}^1$ порождается двумя генераторами t и s такими, что $[t, s] = s$. Она допускает двумерное точное представление:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление допускает другую запись:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что образы алгебры Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1)$ при данных представлениях образуют изотопическую пару. Обозначим образы элементов t и s как $t^{\pm}$ и $s^{\pm}$ для первого и второго представлений, соответственно, тогда

$$[s^+, t^+]_{t^-} = s^+, \qquad [s^+, t^+]_{s^-} = t^+;$$
$$[s^-, t^-]_{t^+} = -s^-, \qquad [s^-, t^-]_{s^+} = -t^-.$$

Отметим полученную симметрию t– и s–переменных.

Изотопическая пара, порожденная $t^{\pm}$ и $s^{\pm}$, допускает бесконечный набор гомоморфизмов в комплексификацию $(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1), C^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1))$ изотопической пары $(\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1), C^{\infty}(\mathbb{S}^1))$: зафиксируем базис $e_n = ie^{int}\partial_t$ в $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1)$ и базис $f_n = e^{int}$ в $C^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1)$. Изокоммутационные соотношения в изотопической паре $(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1), C^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1))$ в базисе $\{e_n, f_m\}$ имеют вид:

$$[e_n, e_m]_{f_k} = (n-m)e_{n+m+k}, \qquad [f_n, f_m]_{e_k} = (n-m)f_{n+m+k}.$$

Мономорфизмы $\tau_{n,m}$ $(n > m)$ изотопической пары $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1), \mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1))$ в $(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1), C^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1))$ определяются формулами

$$t^+ \mapsto \sqrt{n-m}e_m, \quad s^+ \mapsto \sqrt{n-m}e_n, \quad t^- \mapsto \sqrt{n-m}f_{-n}, \quad s^- \mapsto \sqrt{n-m}f_{-m}.$$

Пример 6. Изотопическая пара Окубо [77]. Пусть V – линейное пространство, V^* – двойственное пространство, тогда (V, V^*) наделяется структурой изотопической пары:

$$[X, Y]_A = (X, A)Y - (Y, A)X$$
$$[A, B]_X = (X, B)A - (X, A)B,$$

где $X, Y \in V,\ A, B \in V^*$.

Изотопическая пара Окубо совпадает с $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1), \mathfrak{aff}(\mathbb{C}^1))$ при $\dim(V) = 2$ и с парой примера 1 при $\dim(V) = 3$.

3. Квантование констант

Под *квантованием констант* понимается замена некоторых числовых констант в определяющих (в частности, коммутационных или антикоммутационных) соотношениях заданным образом реализованных (представленных) алгебраических объектов на матричные (операторные) величины.

3.1. Квантование констант в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, алгебра Склянина.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ кососимметрических матриц 3×3. В пространстве кососимметрических матриц удобно зафиксировать базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутационные соотношения в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ в этом базисе имеют вид

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k,$$

где ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметрический тензор. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ идентифицируется как алгебра трехмерных векторов, умножение в которой задается посредством векторного произведения.

Теорема 6А. *Для любых трех линейно–независимых кососимметрических матриц* 3×3 S_i $(i = 1, 2, 3)$ *существует ровно одна симметрическая матрица* 3×3 Q *такая, что*

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk}(QS_k + S_kQ),$$

где ϵ_{ijk} *– абсолютно антисимметрический тензор. При этом*

$$[Q, S_i] = F_i(S_1, S_2, S_3),$$

где F_i *– однозначно определенные квадратичные формы от* S_1, S_2, S_3. *Если матрицы* S_i *приведены к виду*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & \delta & \epsilon \\ -\delta & 0 & \zeta \\ -\epsilon & -\zeta & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$Q = \begin{pmatrix} u & x & y \\ x & v & z \\ y & z & w \end{pmatrix},$$

где

$$x = \frac{\alpha^2\epsilon + \beta^2\epsilon - \beta\gamma\delta}{\alpha\gamma}, \quad y = \frac{\beta\epsilon - \gamma\delta}{\alpha}, \quad z = \frac{\beta\zeta}{\alpha},$$

$$u + v = -\frac{\gamma\zeta}{\alpha}, \quad u + w = -\tfrac{\zeta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\gamma}, \quad v + w = \tfrac{2\beta\gamma\delta\epsilon - \alpha^2\epsilon^2 - \beta^2\epsilon^2 - \alpha^2\gamma^2 - \epsilon^2\gamma^2}{\alpha\gamma\zeta}.$$

Матрицы S_i, Q *осуществляют представление алгебры с квадратичными соотношениями, совпадающей с алгеброй Склянина [30,31] при* $\mathrm{tr}(S_iS_j) = 0$ *коль скоро* $i \neq j$. *В случае алгебры Склянина* $F_i(S_1, S_2, S_3) = \epsilon_{ijk}J_{jk}(S_jS_k + S_kS_j)$ $(J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12}J_{23}J_{31} = 0)$.

Теорема 6Б. *Для любых терх линейно–независимых кососимметрических матриц* 3×3 S_i $(i = 1, 2, 3)$ *существует ровно одна симметрическая матрица* 3×3 Q *такая, что*

$$[S_i, S_j]_Q = \epsilon_{ijk}S_k,$$

где ϵ_{ijk} *– абсолютно антисимметрический тензор. Если матрицы* S_i *приведены к виду*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & \delta & \epsilon \\ -\delta & 0 & \zeta \\ -\epsilon & -\zeta & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$Q = \begin{pmatrix} u & x & y \\ x & v & z \\ y & z & w \end{pmatrix},$$

где

$$x = \frac{\epsilon}{\alpha\gamma}, \quad y = -\frac{\delta}{\alpha\gamma}, \quad z = \frac{\beta\gamma + \epsilon\delta}{\alpha\gamma\zeta},$$

$$u = -\frac{\zeta}{\alpha\gamma}, \quad v = -\tfrac{\gamma^2+\epsilon^2}{\alpha\gamma\zeta}, \quad w = \tfrac{\alpha^2+\beta^2+\epsilon^2}{\alpha\gamma\zeta}.$$

Матрицы S_i, Q *задают представление изотопической пары* $(\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}), \mathbb{C})$, *отвечающей алгебре Ли* $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

3.2. Квантовое расщепление констант в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$.

Пусть образующие S_i некоторого алгебраического объекта $\mathfrak{A}$ выражены через генераторы a_α, a^*_α алгебры Вейля W: $S_i = f_i(a_\alpha, a^*_\alpha)$; пусть $\hat{S}_i$, Q – образующие алгебраического объекта $\hat{\mathfrak{A}}$, полученного из $\mathfrak{A}$ квантованием константы; *расщеплением квантованной константы* Q называется представление $\hat{S}_i$ и Q через генераторы некоторой алгебры Пуанкаре–Бирхгофа–Витта $\hat{W}$, порожденной a_α, a^*_α, q_β: $\hat{S}_i = f_i(a_\alpha, a^*_\alpha)$, $Q = g(q_\beta)$ [функции f_i не изменились (!)]. Подалгебра $\mathfrak{Q}$ алгебры $\hat{W}$, порождаемая q_α называется *алгеброй расщепленных квантованных констант.*

Квантовое расщепление констант достаточно часто встречается при решении квантовополевых задач (ср. параграф 1.6.), в этом случае роль мономорфизмов в алгебру Вейля играет представление свободных полей.

Вложим алгебру Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ в алгебру Вейля W_3, порожденную образующими a_i, a^*_i $(i = 1, 2, 3)$, $[a_i, a_j] = [a^*_i, a^*_j] = 0$, $[a^*_i, a_j] = \delta_{ij}$: $S_i = \epsilon_{ijk} a_j a^*_k$.

Вопрос 3:. Существует ли (и если да, то насколько единственное) расщепление квантованной константы Q в алгебре теоремы 6A вида $Q = q_1^2+q_2^2+q_3^2$ такое, что

$$[a_i, a_j] = [a^*_i, a^*_j] = 0, \quad [a^*_j, a_i] = f^{kl}_{ij} q_k q_l,$$
$$[q_i, a_j] = \varphi_{ij}(a_\alpha, a^*_\alpha), \quad [q_i, a^*_j] = \psi_{ij}(a_\alpha, a^*_\alpha).$$

4. Характеристики пар операторов, гибриды Ли, скобки Пуассона и нелинейная геометрическая алгебра [42]

Как показывает история математики, поиск (иногда бесплодный) решений "диких", но внутренне красивых задач имеет подчас большую значимость, чем точные ответы к корректно сформулированным "ручным" проблемам. Одной из таких "диких" задач является классификация пар линейных операторов в фиксированном линейном топологическом (даже конечномерном) пространстве [6]. Несмотря на явную трансцендентность этой задачи (и во многом в силу этого), "отблеск ее сияющего шлейфа" – анализ различных числовых и алгебраических характеристик пар операторов – представляет несомненный интерес как с абстрактной, так и с прикладной точек зрения. И если обратная задача теории представлений заключается в восстановлении алгебраического объекта по заданному семейству "представляющих" операторов (матриц), то разумно поиск различных структур, являющихся алгебраическими, геометрическими и геометроалгебраическими характеристиками заданного семейства операторов (матриц) относить к *расширенному толкованию* обратной задачи. Данный параграф посвящен первоначальному изучению ряда подобных для пары операторов.

Общий план таков. Пара операторов характеризуется некоторым алгебраическим объектом, своим "инвариантом", гибридом Ли (линейным пространством, оснащенным парой согласованных скобок Ли). В определенном смысле указанный объект можно считать "стабилизатором" инфинитезимального действия другого алгебраического объекта, псевдогибрида Ли (линейного пространства, оснащенного парой согласованных структур псевдоалгебр Ли [12,47]) на парах операторов. Согласованность структур псевдоалгебр Ли означает, в частности, что любая линейная комбинация соответствующих структурных функций снова задает структуру псевдоалгебры Ли. Таким образом, на парах операторов задано двупараметрическое семейство действий псевдоалгебр Ли. Более того, на орбите псевдогибрида Ли задано действие некоторой большей псевдоалгебры Ли (грифона данной орбиты), получаемой путем добавления к действиям псевдоалгебр Ли, соответствующих псевдогибриду Ли, коммутативного семейства т.н. эквигибридных вариаций.

Таким образом, пара операторов может быть охарактеризована как структурой соответствующего гибрида Ли, так и геометрическими свойствами ее орбиты и геометроалгебраическими свойствами отвечающего ей грифона, а также ассоциированного с ним семейства изотопных луп [24] (см.также [73]) и их мультиалгебр Сабинина–Михеева [28]. Таким образом, классическая проблематика функционального анализа оказывается связанной с новейшими исследованиями по нелинейным скобкам Пуассона [12], бесконечномерной геометрии и нелинейной геометрической алгебре [26,27,29,74].

Определение 10. *Гибридом Ли* называется линейное пространство V, снабженное парой согласованных скобок Ли $[\cdot,\cdot]'$ и $[\cdot,\cdot]''$ (согласованность означает, что любая линейная комбинация этих скобок также является скобкой Ли) таких, что выполнено дополнительное условие согласования (гибридизации)

$$\begin{aligned}(\forall X,Y,Z\in V)\ &[[X,Z]',Y]''+[[X,Y]',Z]''+[[Z,Y]',X]''=\\ &[[X,Z]'',Y]'+[[X,Y]'',Z]'+[[Z,Y]'',X]'.\end{aligned}$$

Замечание 5. каждому гибриду Ли V отвечает изотопическая пара $(V,\mathbb{R}^2)$ с тривиальными скобками в $\mathbb{R}^2$ и vice versa.

Пусть (V_1,V_2) – изотопическая пара, $\mathfrak{A}$ – линейное подпространство в V_2. Положим $\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}=\{X\in V_1:\ (\forall A,B\in\mathfrak{A})\ [A,B]_X\in\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}=\{X\in V_1:\ (\forall A,B\in\mathfrak{A})\ [A,B]_X=0\}$.

Теорема 7А [42]. *Для произвольной изотопической пары (V_1,V_2) и линейного подпространства $\mathfrak{A}\subseteq V_2$ пары $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}},\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ и $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ обладают естественными структурами изотопических пар; при этом$(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}},\mathfrak{A})$ и $(\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ допускают естественные вложения в (V_1,V_2).*

Пусть (V_1,V_2) – произвольная изотопическая пара и $\mathfrak{A}=\langle A,B\rangle$ – линейное пространство, натянутое на два элемента A и B из V_2. Положим $a(A,B)=\dim\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}$, $a_0(A,B)=\dim\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}$.

Теорема 7Б [42]. *$a_0(A,B)=0,1,2$. Если $a_0(A,B)=1$, то изотопическая пара $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}})$ является изотопической парой, ассоциированной с алгеброй Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^1)$ группы аффинных преобразований прямой. Если $a_0(A,B)=2$, то изотопическая пара $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}})$ совпадают с парой Окубо $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.*

Теорема 7B [42]. *Если (V_1, V_2) – произвольная изотопическая пара, A и B – два элемента из V_2 и $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, то $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ наделяется естественной структурой гибрида Ли, а именно $(\forall X, Y \in \mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}})\ [X,Y]' = [X,Y]_A, [X,Y]'' = [X,Y]_B$.*

Рассмотрим конечномерный случай.

Пример 1. *Если A и B – две матрицы 2×2, то $a(A,B)$ равно 4, если эти матрицы пропорциональны, и 2 иначе. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ непропорциональны, то гибрид Ли $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ порождается матрицами*

$$\begin{pmatrix} de-ah & af-be \\ ag-ce & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} dg-ch & cf-bg \\ 0 & ag-ce \end{pmatrix}$$

и тривиален (т.е. обе скобки тождественно равны нулю). Если A и B пропорциональны, то гибрид Ли $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ реализуется в пространстве всех матриц 2×2 и нетривиален (обе скобки пропорциональны друг другу и имеют вид $(X,Y)\mapsto XAY - YAX$ или $XBY - YBX$ $(X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))$.

Аналогично может быть обсчитан менее тривиальный случай $n = 3$. Задача нахождения $\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}$ и $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ при произвольном n является линейной и легко программируемой.

Замечание 6. Если $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$ и $\mathfrak{A}' = \langle CAD, CBD\rangle$, где $C, D \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, то $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ и $(\mathfrak{A}')^{\hat{\mathfrak{i}}}$ изоморфны как гибриды Ли.

Замечание 7. Пусть $F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}(F) = \langle F\rangle^{!} = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : [X,F] = 0\}$, тогда $\mathfrak{h}(F)$ наделяется естественной структурой гибрида Ли со скобками $[X,Y]' = [X,Y] = XY - YX$ и $[X,Y]'' = F[X,Y] = [X,Y]F = XFY - YFX$. Пусть $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда отображения $X \mapsto XA$, $X \mapsto AX$ задают изоморфизм $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ на $\mathfrak{h}(A^{-1}B)$ и $\mathfrak{h}(BA^{-1})$, соответственно. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и существует матрица F такая, что $AF = B$ $(FA = B)$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда отображение $X \mapsto XA$ $(X \mapsto AX)$ задает эпиморфизм $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ на $\mathfrak{h}(F)$.

Рассмотрим бесконечномерный случай. Пусть базисное линейное пространство – пространство многочленов одной переменной x.

Пример 2. *Если $A = \frac{\partial}{\partial x}$ и $B = x$, то гибрид Ли порождается дифференциальными операторами P, левый символ которых $P(x,\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$P''_{x\xi} + xP'_x + \xi P'_\xi + P = 0.$$

Зафиксируем базис $e_n = x^n f_n(x\frac{\partial}{\partial x})$ в пространстве решений. Функции $f_n(\xi)$ имеют вид $f(2k) = \frac{(2k-1)!!}{(2k+n)!!}$, $f_n(2k+1) = 0$. В базисе e_n коммутационные соотношения в гибриде Ли задаются формулами

$$[e_m, e_n]^{\cdot} = \begin{cases} 0, & \text{если } m+n \in 2\mathbb{Z}, \\ e_{n+m\pm 1}, & \text{если } m \in 2\mathbb{Z}+1,\ n \in 2\mathbb{Z}, \\ -e_{n+m\pm 1}, & \text{если } m \in 2\mathbb{Z},\ n \in 2\mathbb{Z}+1,. \end{cases}$$

Знак плюс отвечает скобке $[\cdot,\cdot]'$, а знак минус – скобке $[\cdot,\cdot]''$.

Отметим следующий факт. Если V – гибрид Ли со скобками $[\cdot,\cdot]'$ и $[\cdot,\cdot]''$, то линейное пространство $\mathfrak{k}(V) = V \oplus V$ наделяется структурой алгебры Ли с коммутатором

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = \\ ([X_1, X_2]'' + \tfrac{1}{2}([X_1, Y_2]' - [X_2, Y_1]'), [Y_1, Y_2]' + \tfrac{1}{2}([Y_1, X_2]'' - [Y_2, X_1]'')).$$

Определение 11. Изотопическая пара (V_1, V_2) называется *контрагредиентной*, если $V_1 = V_2^*$, $V_2 = V_1^*$ и для любых $A, B \in V_2$, $X, Y \in V_1$ выполняется цепочка равенств:

$$\langle [X,Y]_B, A\rangle = -\langle [X,Y]_A, B\rangle = \langle [A,B]_X, Y\rangle = -\langle [A,B]_Y, X\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – естественное спаривание V_1 и V_2.

Замечание 8. Конечномерная операторная изотопическая пара является контрагредиентной.

Определим для контрагредиентной изотопической пары (V_1, V_2) 4–форму $\Omega : \bigwedge^2 V_1 \otimes \bigwedge^2 V_2 \mapsto \mathbb{R}$:

$$\Omega(A, B; X, Y) = \langle [X,Y]_B, A\rangle = -\langle [X,Y]_A, B\rangle = \langle [A,B]_X, Y\rangle = -\langle [A,B]_Y, X\rangle.$$

Замечание 9. Ввиду невырожденности спаривания $V_1 \otimes V_2 \mapsto \mathbb{R}$ определены операторы $R_\Omega^{(i)} : \bigwedge^2 V_i \mapsto \bigwedge^2 V_i$ такие, что

$$\left\langle R_\Omega^{(1)}(X\wedge Y), A\wedge B\right\rangle = \Omega(A, B; X, Y) = \left\langle X\wedge Y, R_\Omega^{(2)}(A\wedge B)\right\rangle.$$

При этом операторы $R_\Omega^{(i)}$ сопряжены друг другу и инволютивны: $R_\Omega^{(2)} = (R_\Omega^{(1)})^*$, $R_\Omega^{(1)} = (R_\Omega^{(2)})^*$, $(R_\Omega^{(i)})^2 = -\operatorname{id}$.

Замечание 10. Пусть (V_1, V_2) – произвольная контрагредиентная изотопическая пара, $A, B \in V_2$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда $\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}} = \ker \Omega_{A,B}$, где $\Omega_{A,B}(\cdot,\cdot) = \Omega(A, B; \cdot,\cdot)$. Как следствие, $\operatorname{codim}_{\operatorname{End}(V_1)} \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}$ – четно.

Замечание 11. Пусть $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\pi : X \mapsto XA$ или AX ($X \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$), тогда $\Omega_{A,B}|_{\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})/\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}} = \pi_*\omega_{\mathrm{Kir}}(F)$ – обратный образ формы Кириллова [14,33] к орбите (ко)присоединенного представления группы Ли $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ точки F ($F = A^{-1}B$ или BA^{-1}) в этой точке.

Определение 12.

A [12]. *Псевдоалгеброй Ли* векторных полей на многообразии M называется тройка $(\mathfrak{g}, m, \tau)$, где $\mathfrak{g}$ – линейное пространство, $\tau \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}, \operatorname{Vect}(M))$, $m \in \operatorname{Map}(M, \operatorname{Hom}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$, причем m и τ согласованы между собой, а именно, если положить $[X,Y]_a = m(a)(X,Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g},\ a \in M)$, то $[\tau(X), \tau(Y)](a) = \tau([X,Y]_a)$.

Б . *Псевдогибридом Ли* векторных полей на многообразии M называется линейное пространство $\mathfrak{g}$, оснащенное двумя согласованными структурами псевдоалгебр Ли $(\mathfrak{g}, m', \tau')$ $(\mathfrak{g}, m'', \tau'')$ такими, что $[\tau'(X), \tau''(Y)](a) + [\tau''(X), \tau'(Y)](a) = \tau'([X,Y]''_a) + \tau''([X,Y]'_a)$ $(X, Y \in \mathfrak{g},\ a \in M)$, где $[X,Y]'_a = m'(a)(X,Y)$ и $[X,Y]''_a = m''(a)(X,Y)$.

Если $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ – псевдоалгебра Ли векторных полей на многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ действует на M; аналогично, если $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ – псевдогибрид Ли векторных полей на многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ действует на M. Отметим, что если $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ – псевдогибрид Ли, то для любых λ и μ тройка $(\mathfrak{g}, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ $(m_{\lambda,\mu} = \lambda m' + \mu m''$, $\tau_{\lambda,\mu} = \lambda\tau' + \mu\tau'')$ является псевдоалгеброй Ли; таким образом, действие псевдогибрида Ли на фиксированном многообразии задает двупараметрическое семейство псевдоалгебр Ли $(\mathfrak{g}, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ векторных полей на нем.

Пусть (V_1, V_2) – произвольная изотопическая пара. Положим $W_i = V_i \oplus V_i$.

Теорема 8А [42]. *V_1 действует как псевдогибрид Ли на W_2 (и наоборот, V_2 действует как псевдогибрид Ли на W_1):*

$$\tau'(X)(A,B) = ([A,B]_X, 0), \quad \tau''(X)(A,B) = (0, [A,B]_X)$$
$$\tau'(A)(X,Y) = ([X,Y]_A, 0), \quad \tau''(A)(X,Y) = (0, [X,Y]_A)$$

$(X, Y \in \mathfrak{f}_1,\ A, B \in \mathfrak{f}_2)$;

$$[X,Y]'_{(A,B)} = [X,Y]_B, \quad [X,Y]''_{(A,B)} = [X,Y]_A$$
$$[A,B]'_{(X,Y)} = [A,B]_Y, \quad [A,B]''_{(X,Y)} = [A,B]_X$$

Замечание 12. Если конечномерный псевдогибрид Ли $\mathfrak{g}$ действует на конечномерном многообразии M, то каждая псевдоалгебра Ли векторных полей на M из соответствующего двупараметрического семейства псевдоалгебр Ли экспоненцируется до псевдо(квази)группы Ли преобразований M [12,24,47,73].

Определение 12.

В. *Орбитой* псевдоалгебры Ли $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ векторных полей на многообразии M называется минимальное подмногообразие N такое, что $\tau(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Vect}(N)$.

Г. *Орбитой* псевдогибрида Ли $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ векторных полей на многообразии M называется минимальное подмногообразие N такое, что $\tau'(\mathfrak{g}) + \tau''(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Vect}(N)$.

Замечание 13. Для произвольной изотопической пары (V_1, V_2) пространство W_2 допускает $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$–эквивариантное расслоение $\mathcal{P}_{\lambda,\mu}$ над базой V_2 с проекцией $p : W_2 \mapsto V_2$, где $p(A,B) = \lambda A + \mu B$, слой $U(C)$ над точкой C изоморфен V_2 для любого C. На любом слое $U(C)$ действие псевдоалгебры Ли $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ редуцируется до действия алгебры Ли $\mathfrak{l}(C)$, реализуемой в пространстве V_1 с помощью $[\cdot,\cdot]_C$, $U(C) \simeq \mathfrak{l}^*(C)$. Таким образом, орбиты действия псевдоалгебры Ли $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ на W_2 совпадают с орбитами каприсоединенных представлений алгебр Ли $\mathfrak{l}(C)$.

Замечание 14. Для матричной изотопической пары (V_1, V_2) орбиты действия псевдогибрида Ли V_1 на W_2 совпадают с орбитами действия $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, описанного в замечании 2.

Таким образом, касательное пространство к орбите псевдогибрида Ли V_1 на W_2 в произвольной точке для матричной изотопической пары не совпадает с прямой суммой касательных пространств к орбитам соответствующих псевдоалгебр Ли в указанной точке.

Определение 13. Пусть (V_1, V_2) – произвольная изотопическая пара, $\mathcal{O}$ – орбита действия псевдогибрида Ли V_1 на W_2. Определим *эквигибридное слоение* $\mathcal{F}$ на орбите $\mathcal{O}$ следующим образом: слои $\mathcal{F}$ состоят из пар (A, B) с совпадающими гидридами Ли $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ ($\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}} = \langle A, B\rangle$).

Гипотеза 3. Для произвольной изотопической пары (V_1, V_2) касательное пространство к орбите действия псевдогибрида Ли V_1 на W_2 в произвольной точке является суммой касательных пространств к орбитам соответствующих псевдоалгебр Ли и к эквигибридному слоению в указанной точке

Данная гипотеза справедлива для метричной изотопической пары. Более того, в этом случае эквигибридное слоение порождается коммутативным семейством вариаций, которые мы будем называть *эквигибридными вариациями.* А именно, для произвольного $X \in \mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ ($\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$) определим вариации $\delta(X)$ следующим образом:. $\delta(X)(A, B) = (AXA + AXB, AXB + BXB)$. Нетрудно показать, в этом случае в произвольной точке орбиты псевдогибрида Ли имеет место разложение касательного пространства к орбите в *прямую сумму* касательных пространств к орбитам соответствующих псевдоалгебр Ли и эквигибридных вариаций (которые образуют коммутативную алгебру Ли). Как следствие, на орбите псевдогибрида Ли V_1 задано действие псевдоалгебры Ли $\widehat{W}_1 = W_1 \oplus \mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$, где действие W_1 определяется действиями псевдоалгебр Ли (V_1, m', τ') и (V_2, m'', τ''), а действие $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ задается эквигибридными вариациями. Указанную псевдоалгебру Ли $\widehat{W}_1$ будем называть *грифоном* соответствующей орбиты псевдогибрида Ли.

Замечание 15. В конечномерном случае действие грифона на орбите экспоненцируется до действия соответствующей псевдо(квази)группы Ли [12,24,73].

Замечание 16. Разложение касательного пространства к орбите $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли V_1 в прямую сумму касательных пространств к орбитам псевдоалгебр Ли $(V_1, m_{\lambda',\mu'}, \tau_{\lambda',\mu'})$, $(V_2, m_{\lambda'',\mu''}, \tau_{\lambda'',\mu''})$ ($\begin{vmatrix} \lambda' & \lambda'' \\ \mu' & \mu'' \end{vmatrix} \neq 0$) и эквигибридных вариаций означает, что эквигибридное слоение и расслоения $\mathcal{P}_{\lambda',\mu'}$, $\mathcal{P}_{\lambda'',\mu''}$ задают *сеть* [1] на орбите $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли V_1. Отметим также, что $(n+1)$-ка $(\mathcal{P}_{\lambda_1,\mu_1}, \ldots \mathcal{P}_{\lambda_n,\mu_n}, \mathcal{F})$ ($\begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix} \neq 0$ если $i \neq$

j) задет некоторый объект на орбите $\mathcal{O}$, свойства которого сходны со свойствами *многомерной n–ткани* [45,56], а совокупность $(\mathcal{P}_{\lambda,\mu} : (\lambda,\mu) \in \mathbb{P}^1; \mathcal{F})$ – объект, близкий к ∞–ткани работы [55].

Замечание 17. Лупа, определяемая грифоном орбиты псевдогибрида Ли матричной изотопической пары (или соответствующей псевдо(квази)группой Ли), и точкой орбиты (A,B) [12.24.73] допускает вложение в себя группы $\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}(C)$, отвечающей алгебре Ли $\mathfrak{l}(C)$ $(C = \lambda A + \mu B)$, для любых λ и μ, а также коммутативной группы, отвечающей эквигибридным вариациям.

Определим расслоение $\mathcal{P}_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ над орбитой $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли, слой которого над точкой (A,B) совпадает с $\langle A,B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}}$. В расслоении $\mathcal{P}_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задана связность ∇ такая, что

$$\begin{aligned}&\nabla_{\tau'(Z_1)+\tau''(Z_2)+\delta(Z_0)}((A,B),X) = \\ &\qquad ((\tau'(Z_1)+\tau''(Z_2)+\delta(Z_0))(A,B),[Z_1,X]_B+[Z_2,X]_A),\end{aligned}$$

где $Z_1, Z_2 \in V_2$, $Z_0, X \in \langle A,B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}}$. Рассмотрим также двойственное расслоение $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ над $\mathcal{O}$ со слоем $(\langle A,B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}})^*$ над точкой (A,B), в котором определена двойственная связность ∇^*. Ковариантные производные в $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ вдоль элементов грифона замыкаются до действия некоторой псевдоалгебры Ли, которую будем называть *каноническим расширением грифона.*

Замечание 18. Для матричной изотопической пары связность ∇^* в расслоении $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задет поднятие действия дубля $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ на базе до свободного и транзитивного действия $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ на тотальном пространстве. Как следствие, на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задана пуассонова структура дубля Гейзенберга [46,81].

Определение 14 (ср. [12]). Псевдоалгебра Ли $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ называется *гамильтоновой*, если соответствующее многообразие M – пуассоново и задано линейное отображение $\hat{\tau} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{O}(M))$ такое, что $\tau(X)F = \{\hat{\tau}(X), F\}$ $(X \in \mathfrak{g},\ F \in \mathcal{O}(M)$. Если $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ – гамильтонова псевдоалгебра векторных полей на пуассоновом многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ действует на M гамильтоново.

Теорема 8Б [42]. *Пуассонова структура на $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ инвариантна относительно действия канонического расширения грифона, являющегося гамильтоновым.*

Список литературы

[1] Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В., Сети на многообразиях / Проблемы геометрии 12. М., ВИНИТИ, 1981, С.97-125.

[2] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения. М., Мир, 1980.

[3] Биденхарн Л., Лаук Дж., Угловой момент в квантовой физике. М., Мир, 1984.

[4] Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Модели представлений классических групп и их скрытые симметрии // Функц. анализ и его прилож. 1984. Т.18, вып.3. С.14-31.

[5] Гельфанд И.М., Кириллов А.А., Структура тела Ли, связанного с полупростой раасщепимой алгеброй Ли // Функц. анализ и его прилож. 1968. Т.3, вып.1. С.7-26.

[6] Гельфанд И.М., Пономарев В.А., Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функц. анализ и его прилож. 1969. Т.3, вып.4. С.81-83.

[7] Говорков А.Б., О возможности параполевого представления внутренних степеней свободы типа изоспина и странности // ЖЭТФ. 1968. Т.54. С.1785-1798.

[8] Давыдов А.С., Квантовая механика. М., Физматлит, 1963.

[9] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры. М., Мир, 1978.

[10] Дринфельд В.Г., Квантовые группы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т.155. С.19-49.

[11] Желобенко Д.П., Штерн А.И., Представления групп Ли. М., Наука, 1983.

[12] Карасев М.В., Маслов В.П., Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М., Наука, 1991.

[13] Карасев М.В., Маслов В.П., Назайкинский В.Е., Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их применения. I,II/ Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения 13. М., ВИНИТИ, 1979.

[14] Кириллов А.А., Элементы теории представлений. М., Наука, 1972.

[15] Климык А.У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша–Гордана представлений групп. Киев, Наукова думка, 1979.

[16] Кузнецов Г.И., Москалюк С.С, Смирнов Ю.Ф., Шелест В.П., Графическая теория представлений ортогональных и унитарных групп. Киев, Наукова думка, 1992.

[17] Кузьмин Е.Н., Шестаков И.П., Неассоциативные структуры / Соврем. пробл. математики. Фундам. направления 57. М., ВИНИТИ, 1992.

[18] Кулиш П.П., Контракция квантовых алгебр и q–осцилляторы // ТМФ. 1991. Т.86, вып.1. С.157-160.

[19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Физматлит, 1963.

[20] Латушкин Ю.Д., Степин А.М., Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем // УМН. 1991. Т.46. С.85-143.

[21] Лейтес Д.А., Супералгебры Ли / Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения 25. М., ВИНИТИ, 1984, С.3-50.

[22] Малкин И.А., Манько В.И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., Наука, 1979.

[23] Манин Ю.И., Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., Наука, 1984.

[24] Михеев П.О., О лупах преобразований / Некоторые приложения дифференциальной геометрии. М., 1985, С.85-93.

[25] Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д., Квантование групп и алгебр Ли // Алгебра и анал. 1989. Т.1, вып.1. С.178-206.

[26] Сабинин Л.В., Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. Прилож. к русск. перев. кн. Кобаяси С., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т.1., М., Наука, 1982.

[27] Сабинин Л.В., О нелинейной геометрической алгебре / Ткани и квазигруппы. Калинин (Тверь), 1988, С.32-37.

[28] Сабинин Л.В., Михеев П.О., Об инфинитезимальной теории локальных аналитических луп // ДАН СССР. 1988. Т.297. С.801-805.

[29] Сабинин Л.В., Михеев П.О., Гладкие квазигруппы и геометрия / Проблемы геометрии 20. М., ВИНИТИ, 1988, С.75-110.

[30] Склянин Е.К., О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т.16, вып.4. С.27-34; 1983. Т.17, вып.4. С.34-48.

[31] Склянин Е.К., Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями // УМН. 1985. Т.40, вып.2. С.214.

[32] Фейгин Б.Л., Алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ и когомологии алгебры Ли дифференциальных операторов // УМН. 1988. Т.35, вып.2. С.169-170.

[33] Фоменко А.Т., Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М., Изд-во МГУ, 1988.

[34] Фукс Д.Б., Когомологии бесконечномерных алгебр Ли, М., Наука, 1984.

[35] Хоружий С.С., Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М., Наука, 1986.

[36] Шафаревич И.Р., Основы алгебраической геометрии. Т.1. М., Наука, 1988.

[37] Шварц А.С., Математические методы квантовой теории поля. М., Наука, 1975.

[38] Шелепин Л.А., Исчисление коэффициентов Клебша–Гордана и его приложения в физике // Теоретико–групповые методы в физике. Труды ФИАН. Т.70, 1973, С.3-120.

[39] Юрьев Д.В., Квантовая конформная теория поля как бесконечномерная некоммутативная геометрия // УМН. 1991. Т.46, вып.4. С.115-138.

[40] Юрьев Д.В., Комплексная проективная геометрия и квантовая проективная теория поля // ТМФ. 1994. Т.101, вып.3. С.331-348.

[41] Юрьев Д.В., Изотопические пары и их представления // ТМФ. 1995. Т.105. вып.1. С.18-28 [e-version (Texas E-Arch. on Math. Phys.): mp_arc/94-267 (1994) (in English)].

[42] Юрьев Д.В., Характеристики пар операторов, гибриды Ли, скобки Пуассона и нелинейная геометрическая алгебра // Фундам. прикл. матем., в печати [e-version (SISSA E-Arch. on Funct. Anal.): funct-an/9411007 (1994)].

[43] Юрьев Д.В., Динамическая обратная задача теории представле-

ний и некоммутативная геометрия // Фундам. прикл. матем., в печати [e-version (SISSA E-Arch. on Funct. Anal.): funct-an/9507001 (1995)].
[44] Abe E., Hopf algebras. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
[45] Akivis M.A., Shelekhov A.M., Geometry and algebra of multidimensional 3-webs. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
[46] Alekseev A.Yu., Malkin A.Z., Symplectic structures associated to Lie–Poisson groups // Commun. Math. Phys. 1994. V.162. P.147-174 [e-version (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9303038 (1993)].
[47] Batalin I., Quasigroup construction and first class constraints // J. Math. Phys. 1981. V.22. P.1837-1850.
[48] Biedenharn L.C., Louck J.D., The Racah–Wigner algebra in quantum theory. Addison Wesley Publ, 1981.
[49] Biedenharn L.C., Truini P., An $\mathcal{E}_6 \otimes \mathcal{U}(1)$–invariant quantum- mechanics for a Jordan pair // J. Math. Phys. 1982. V.23. P.1327-1345.
[50] Connes A., Introduction à la géometrie noncommutative. InterEditions, Paris, 1990.
[51] Dothann Y., Gellmann M., Neeman Y., Series of hadron energy levels as representations of non–compact groups // Phys. Lett.-1965.-V.17.-P.148-151.
[52] Faulkner J.R., On the geometry of inner ideals // J. Alg. 1973. V.26. P.1-9.
[53] Faulkner J.R., Ferrar J.C., Simple anti–Jordan pairs // Commun. Alg. 1980. V.8. no.11. P.993–1013.
[54] Gelfand I.M., Kirillov A.A., Sur les corps liés aux algèbges enveloppantes des algèbres de Lie // Publ. Math. IHES. 1966. V.31. P.5-20.
[55] Gelfand I.M., Zakharevich I., Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems // J. Funct. Anal. 1991. V.99. P.150-178.
[56] Gol'dberg V., Theory of multicodimensional (n+1)-webs. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
[57] Green H.S., A generalized method of field quantization // Phys. Rev. 1953. V.90. P.270-273.
[58] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras. Amer. Math. Soc., RI, 1971.
[59] Juriev D., Infinite dimensional geometry and quantum field theory of strings. I. Infinite dimensional geometry of second quantized free strings // Alg. Groups Geom. V.11. P.145-179 [e-version (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9403068 (1994)].
[60] Juriev D., Infinite dimensional geometry and quantum field theory of strings. II. Infinite dimensional noncommutative geometry of a self–interacting string field // Russian J. Math. Phys. 1996. V.4. N.3. [e-version (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9403148 (1994)].
[61] Juriev D., Infinite dimensional geometry and quantum field theory of strings. III. Infinite dimensional W–geometry of a second quantized free string // J. Geom. Phys. 1995. V.16. P.275-300 [e-version (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9401026 (1994)].
[62] Juriev D., Setting hidden symmetries free by the noncommutative Veronese mapping // J. Math. Phys. 1994. V.35. P.5021-5024 [e-version (LANL E-

Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9402130 (1994)].
[63] Juriev D., Topics in hidden symmetries / E–print (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9405050 (1994).
[64] Juriev D., Classical and quantum dynamics of noncanonically coupled oscillators and Lie superalgebras // Russian J. Math. Phys., to appear [e-version (SISSA E-Arch. on Funct. Anal.): funct-an/9409004 (1994)].
[65] Kac V.G. A sketch of Lie superalgebra theory // Commun. Math. Phys. 1977. V.53. P.31–64; Lie superalgebras // Adv. Math. 1977. V.26. P.8-96; Lie superalgebras // Lect. Notes Math. 1978. V.676. P.597–626.
[66] Lôhmus J., Sorgsepp L., Nonassociative algebras in physics. V.I, II. Estonian Inst. Phys. Tartu, 1985.
[67] Lôhmus J., Paal E., Sorgsepp L., Nonassociative algebras in physics. Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, 1994.
[68] Loos O., Jordan pairs. Springer Verlag, 1975.
[69] Manin Yu.I., Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // Ann. Inst. Fourier. 1987. V.37. P.191-205.
[70] Manin Yu.I., Topics in noncommutative geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, 1991.
[71] McCrimmon K., Jordan algebras and their applications // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V.84. P.612-627.
[72] Meyberg K., Jordan–Tripelsysteme und die Koecher–Konstruktion von Lie–Algebren // Math. Z. 1970. V.115. P.58-78.
[73] Mikheev P.O., Quasigroups of transformations // Trans. Inst. Phys. Estonian Acad. Sci. 1990. V.66. P.54-66.
[74] Mikheev P.O., Sabinin L.V., Quasigroups and differential geometry / Quasigroups and loops. Theory and applications. Berlin, Heldermann Verlag, 1990, P.357-430.
[75] Mukunda N., O'Raifeertaigh L., Sudarshan E., Characteristic noninvariance groups of dynamical symmetries // Phys. Rev. Lett. 1965. V.15. P.1041-1044.
[76] Ohnuki Y., Kamefuchi S., Quantum field theory and parastatsitics. Springer Verlag, 1982.
[77] Okubo S., Triple products and Yang–Baxter equation. II. Orthogonal and symplectic ternary systems // J. Math. Phys. 1993. V.34. P.3292-3315.
[78] Okubo S., Parastatistics as Lie–supertriple systems // J. Math. Phys. 1994. V.35. no.6. P.2785-2803.
[79] Okubo S., Jordan triple systems and Yang–Baxter equation / Preprint Univ. Rochester UR-1334, ER-40685-783 (1993) [e-version (LANL E-Arch. on Theor. High Energy Phys.): hep-th/9312181 (1993)].
[80] Santilli R.M., Foundations of theoretical mechanics. II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. Springer Verlag, 1982.
[81] Semenov-Tian-Shansky M.A., Dressing transformations and Poisson–Lie group actions // Publ. RIMS Kyoto. 1985. V.21. P.1237-1260.
[82] Scheunert M., The theory of Lie superalgebras. Springer Verlag, 1979.
[83] Vershik A.M., Algebras with quadratic relations // Selecta Math. Sovietica. 1992. V.11. P.293-315 [первоначально опубликовано на русском языке в сб. Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.

Ин-т математики, Киев, 1984, С.32-57].
[84] Wigner E., Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? // Phys. Rev. 1950. V.77. P.711-712.

ЦМФИ "Таласса Этерия"
E-mail address: denis@juriev.msk.ru