VALEURS PROPRES ET RÉSONANCES AU VOISINAGE D'UN SEUIL

Alain Grigis Frédéric Klopp

Décembre 1994

Abstract. In an abstract setting, we consider an operator whose resolvent can be extended meromorphically to a Riemann surface near a branching point. The operator depends on a parameter, and we study the behavior of the resonances i.e. poles of the resolvent as functions of the parameter; in particular, we study what happens when a resonance is located at the branching point. This study may be applied to a periodic Schrödinger operator perturbed by a compactly supported potential. The parameter is a coupling constant and the branching point is an edge of the absolutely continuous spectrum of the periodic operator.

Résumé. Nous étudions dans un cadre abstrait un opérateur dépendant d'un paramètre dont la résolvante peut s'étendre de façon méromorphe à une surface de Riemann au voisinage d'un point de branchement. Nous étudions la dépendance des pôles de la résolvante, ou résonances en fonction du paramètre; en particulier, nous étudions le cas où une résonance se trouve au point de branchement. Cette étude peut s'appliquer à un opérateur de Schrödinger à potentiel périodique avec une perturbation compacte, le paramètre étant une constante de couplage, et le point de branchement ou seuil, l'extrémité d'une bande de spectre absolument continu.

Introduction.

Sur $\mathbb{R}^n$, on considère un opérateur de Schrödinger avec un potentiel périodique

$$H = -\Delta + V$$

où V est Γ-périodique, Γ étant un réseau de $\mathbb{R}^n$. Il est bien connu que le spectre de cet opérateur est purement absolument continu et possède une structure de bandes. La résolvante $(\lambda - H)^{-1}$ peut se prolonger à partir de la région physique $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ au demi-plan inférieur à travers les bandes spectrales, comme cela a été démontré par C. Gérard [Ge 2]. On peut prolonger cette résolvante à une surface de Riemann qui présente des points de branchements (en particulier aux extrémités des bandes spectrales de H) appelés seuils.

Soit W un potentiel à support compact et positif. Pour t une constante de couplage réelle, on définit l'opérateur perturbé

$$H(t) = H + tW = -\Delta + V + tW.$$

Celui-ci peut admettre des valeurs propres dans les lacunes du spectre continu. On peut également construire un prolongement méromorphe de la résolvante de $H(t)$ à la surface de Riemann citée ci-dessus. Sur cette surface de Riemann, $H(t)$ peut admettre des résonances. Dans [Kl], le second auteur a étudié, dans la limite semi-classique, la création de telles valeurs propres et résonances pour une petite constante de couplage.

De nombreux travaux, par exemple [A-D-H, Bi, Rai] étudient l'asymptotique du nombre de valeurs propres de $H(t)$ dans les lacunes du spectre continu pour les grandes valeurs de t. Comme

W est supposée positive, il est clair que ces valeurs propres sont des fonctions croissantes de t. Au cours d'un colloque organisé à l'Institut Euler à Saint-Pétersbourg, M. Sh. Birman a posé la question suivante:

Q: "Que deviennent les valeurs propres lorsque l'on fait varier la constante de couplage? On sait qu'elles croissent avec celle-ci jusqu'à rencontrer la prochaine bande de spectre absolument continue. Mais là que se passe-t-il? Deviennent-elles des résonances ou des valeur propres plongées?".

C'est cette question qui a motivé la présente étude. Nous avons donc repris dans un cadre abstrait la méthode d'extension de la résolvante à une surface de Riemann, pour un opérateur non perturbé tout d'abord. Ensuite nous introduisons une perturbation compacte dépendant analytiquement d'un paramètre t. Nous définissons les résonances et nous étudions leur dépendance par rapport au paramètre t. La situation vraiment nouvelle est celle où pour une valeur t_0 de la constante de couplage, une résonance est située au seuil i.e au point de ramification de la surface de Riemann. Le comportement de la résonance lorsque t varie dépend alors de façon essentielle du type de ramification du seuil. Sous des hypothèses génériques, nous obtenons l'un des trois cas suivants:

1) il existe une unique résonance $z(t)$ telle que $z(t_0) = z_0$, z_0 étant le seuil en question.

Dans le cas d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique, c'est ce qui se passe en dimension 3. Ainsi la réponse à la question Q est que la valeur propre arrive au seuil, se transforme en résonance et repart.

2) il existe un nombre fini de résonances $(z_i)_{1\leq i\leq q}$ telles que pour $1 \leq i \leq q$, $z_i(t_0) = z_0$.

Dans le cas d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique, c'est ce qui se passe en dimension impaire supérieure à 3. Dans ce cas, $q = 2$. En particulier, nous montrons qu'une valeur propre arrivant au seuil n'arrive pas toute seule: sur chaque feuillet de la surface de Riemann se trouve une résonance qui l'accompagne. Quand t dépasse le point critique t_0, la valeur propre se transforme en résonance et la paire de résonances repart. Le fait que les résonances arrivent par paires provient uniquement du fait que la ramification de la surface de Riemann dans ce cas est du type rationnel quadratique (voir la discussion suivant le Théorème 2.1).

3) il existe un nombre dénombrable de résonances $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que pour $i \in \mathbb{N}$, $z_i(t_0) = z_0$.

Dans le cas d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique, c'est ce qui se passe en dimension paire supérieure à 3. Le nombre infini de résonances provient du fait que dans ce cas-là, la ramification de la surface de Riemann est du type logarithmique. Mis à part le fait qu'elles sont plus nombreuses, les résonances se comportent de la même façon que dans le cas 2.

Une partie des hypothèses que nous faisons sont génériques au sens mathématique. Cela dit, dans l'application au cas d'un opérateur de Schrödinger périodique perturbé, nous n'avons pas cherché sous quelles conditions portant sur le potentiel périodique et sur la perturbation les dites hypothèses sont vérifiées. Il est probable qu'elles le soient en général mais c'est une question que nous n'avons pas examinée. D'autre part, nous n'avons pas non plus cherché à trouver une interprétation physique aux résonances qui accompagnent la valeur propre. Ces questions ont peut-être un intérêt.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la première partie, nous démontrons, dans un cadre abstrait, l'existence d'un prolongement méromorphe pour une perturbation d'un opérateur dont la résolvante admet un prolongement méromorphe. Ce résultat est local dans le plan des énergies. Nous définissons les résonances. Dans la deuxième partie, nous étudions l'éclatement d'une résonance située à un seuil suivant le type de ramification de la surface de Riemann à ce seuil.

Remerciements.

Les auteurs remercient l'Institut Euler et le Professeur Buslaev pour son accueil en septembre 1993.

I) Prolongement méromorphe de la résolvante.

1. L'opérateur non perturbé.

Soit $\mathcal{H}_0$, un espace de Hilbert (on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$, son produit scalaire), et H, un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}_0$ de domaine $D(H)$ dense dans $\mathcal{H}_0$. On notera $\mathcal{H}_1 = D(H)$, le domaine de H muni du produit scalaire du graphe, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 = \langle\cdot,\cdot\rangle_0 + \langle H\cdot, H\cdot\rangle_0 = \langle (H+i)\cdot, (H+i)\cdot\rangle_0$. Comme H est auto-adjoint donc fermé, $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert. H est borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_0$, et pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $(z+H)^{-1}$ est borné de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$. On suppose qu'il existe $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$, deux espaces de Hilbert tels que

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_0^* \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^* \end{array}$$

les inclusions étant toutes continues et denses (ici $\mathcal{A}_0^*$ (resp. $\mathcal{A}_1^*$) est le dual de $\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathcal{A}_1$) pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ (resp. $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$). On suppose de plus que $(H+i)(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_0$ et $(H+i)^{-1}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_1$.

Le théorème du graphe fermé nous dit alors que $H+i$ est une bijection bi-continue de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$. On prolonge $H+i$ en un opérateur bijectif bicontinu de $\mathcal{A}_1^*$ dans $\mathcal{A}_0^*$.

2. Hypothèses sur la résolvante au bord d'une lacune spectrale.

On note $\sigma(H)$, le spectre de H. On va supposer que le spectre de H évite un intervalle $]a, a+\epsilon_0[$ et que la résolvante de H peut se prolonger près de a en tant qu'opérateur borné sur un ensemble de vecteurs analytiques. Plus précisément, après s'être ramené à $a=0$, on fait l'hypothèse

(H.1)

a) il existe $\epsilon_0 > 0$, S, une fonction analytique sur $D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\setminus]-\epsilon_0, 0]$, F et G des fonctions analytiques non nulles de $D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)$ à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1^*)$ telles que, pour $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\setminus]-\epsilon_0, 0]$,

$$(\lambda - H)^{-1} = F(\lambda) + S(\lambda)\cdot G(\lambda),$$

b) S admet un prolongement analytique $\tilde{S}$ à un revêtement analytique $\mathcal{R}_{\epsilon_0}$ du disque pointé $D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\setminus\{0\}$; on note ρ, la projection canonique de $\mathcal{R}_{\epsilon_0}$ sur $D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\setminus\{0\}$

c) $S(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to 0$ et $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\setminus]-\epsilon_0, 0]$ et, pour $\lambda \in]0,\epsilon_0[$, $S(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Remarques.

1) L'hypothèse (H.1) a) permet de dire que H n'a pas de spectre dans $]0,\epsilon_0[$ (en utilisant la formule de Stone (cf [Re-Si]) et le fait que $\mathcal{A}_1$ est dense dans $\mathcal{H}_0$). De plus, comme S se prolonge analytiquement à $]-\epsilon_0, 0[$, le principe d'absorption limite dit que le spectre de H dans $]-\epsilon_0, 0]$ est purement absolument continu (cf [C-F-K-S], chapitre 4).

2) On suppose que S ne se prolonge pas analytiquement à un voisinage de 0; sinon 0 et donc un voisinage de 0 ne seraient pas dans le spectre de H, ce qui est un cas sans intérêt.

On suppose donc que 0 est un seuil c'est-à-dire un point de branchement pour $S(\lambda)$. Plus tard on rajoutera un point à $\mathcal{R}_{\epsilon_0}$ pour définir la fibre au-dessus de 0. Ceci sera fait dans la partie $I6$. et précisé dans la partie II.

3) Si (H.1) est vérifiée, on peut prolonger la résolvante de H à $\mathcal{R}_{\epsilon_0}$ en tant qu'opérateur borné de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$ de la façon suivante: pour $z \in \mathcal{R}_{\epsilon_0}$, on définit

$$R_H(z) = F(\rho(z)) + \tilde{S}(z)\cdot G(\rho(z)).$$

4) Comme $S(\lambda)$ est réelle pour λ réel, on a, pour $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\backslash]-\epsilon_0,0]$, $\overline{S(\overline{\lambda})} = S(\lambda)$. De plus H est auto-adjoint, ainsi pour $\phi \in \mathcal{A}_0$ et $\psi \in \mathcal{A}_0$, on sait que $\langle(\lambda - H)^{-1}\phi, \psi\rangle_0 = \langle\phi, (\overline{\lambda} - H)^{-1}\psi\rangle_0$ c'est-à-dire

$$\langle F^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0 + \overline{S(\overline{\lambda})}\langle G^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0 = \langle F(\lambda)\phi, \psi\rangle_0 + S(\lambda)\langle G(\lambda)\phi, \psi\rangle_0$$

donc

$$\langle F^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0 - \langle F(\lambda)\phi, \psi\rangle_0 = S(\lambda)\left(\langle G(\lambda)\phi, \psi\rangle_0 - \langle G^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0\right).$$

Comme $\langle F(\lambda)\phi, \psi\rangle_0$, $\langle G(\lambda)\phi, \psi\rangle_0$, $\langle F^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0$ et $\langle G^*(\overline{\lambda})\phi, \psi\rangle_0$ sont analytiques en λ, on en déduit que, pour λ réel, $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ sont symétriques (i.e $\langle F(\lambda)\phi, \psi\rangle_0 = \langle\phi, F(\lambda)\psi\rangle_0$ et $\langle G(\lambda)\phi, \psi\rangle_0 = \langle\phi, G(\lambda)\psi\rangle_0$ pour λ réel, $\phi \in \mathcal{A}_0$ et $\psi \in \mathcal{A}_0$)

Cas de l'opérateur de Schrödinger.

L'hypothèse (H.1) est vérifiée en dimension supérieure où égale à 3, pour le laplacien libre (cf [Ba-Sk]) ainsi que pour des opérateurs de Schrödinger périodiques (cf [Gé 2], [Gé 1]). Dans ce cas, les espaces $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1^*$ sont

$$\mathcal{A}_0 = L^2_a(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n); e^{a\langle x\rangle}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

et

$$\mathcal{A}_1^* = H^2_{-a}(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n); e^{-a\langle x\rangle}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

où $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$ et $a > 0$. Ces espaces sont équipés de leur norme naturelle.

De plus, on a, typiquement, $S(\lambda) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}$ pour n impair et $S(\lambda) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}\log\lambda$ pour n pair (type logarithmique). Remarquons que l'hypothèse (H.1) d) est alors vérifiée si la dimension $n \geq 3$.

3. Décomposition spectrale.

Notons Π_+, la projection spectrale associée à H sur $[\epsilon_0/2, +\infty[$, et $\Pi_- = \mathbf{1} - \Pi_+$, celle sur $]-\infty, \epsilon_0/2]$. On suppose que

(H.2) $\Pi_+(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$.

En utilisant le fait que Π_+ est borné sur $\mathcal{H}_0$ et le théorème du graphe fermé, on voit que Π_+ est borné sur $\mathcal{A}_0$. De plus, on peut étendre Π_+ en un opérateur borné sur $\mathcal{A}_0^*$ par, pour $\psi^* \in \mathcal{A}_0^*$,

$$\forall\psi \in \mathcal{A}_0, \quad \langle\Pi_+\psi^*, \psi\rangle = \langle\psi^*, \Pi_+\psi\rangle.$$

On voit que Π_+ laisse $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{A}_1$ invariant en utilisant l'identité $\Pi_+(H+i)^{-1} = (H+i)^{-1}\Pi_+$ vraie sur $\mathcal{H}_0$. Ainsi Π_+ est borné sur $\mathcal{H}_1$ et sur $\mathcal{A}_1$, et s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{A}_1^*$. Tout ceci reste vrai pour Π_-.

4. Hypothèses sur la perturbation.

On va maintenant définir la perturbation de H. Soit $(A(t))_{t\in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)}$, une famille analytique en t d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(A) \supset D(H)$ indépendant de t, telle que,

(H.3)

a) pour $t \in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)$, $A(t)$ est compact de $\mathcal{A}_1^*$ dans $\mathcal{A}_0$ pour $t \in]\epsilon_0, \epsilon_0[$,

b) pour $t \in]\epsilon_0, \epsilon_0[$, $A(t)$ est autoadjoint,

c) $1 - \Pi_- A(0)\Pi_- F(0)$ est inversible en tant qu'opérateur de $\mathcal{A}_0$ dans lui-même.

Remarques.

1) Le point a) est équivalent à supposer que A est H-compact de $\mathcal{A}_0^*$ dans $\mathcal{A}_0$. Ceci implique que A est H-compact sur $\mathcal{H}_0$.

2) Par le point a), on sait que $\Pi_- A(0)\Pi_- F(0)$ est compact de $\mathcal{A}_0$ dans lui-même. Donc supposer c) revient à supposer que 1 n'est pas valeur propre de $\Pi_- A(0)\Pi_- F(0)$. Comme $F(0)\Pi_- A(0)\Pi_-$ est adjoint de $\Pi_- A(0)\Pi_- F(0)$, on peux supposer de façon équivalente que $1 - F(0)\Pi_- A(0)\Pi_-$ est inversible en tant qu'opérateur de $\mathcal{A}_1^*$ dans lui-même.

5. L'opérateur de Livsic.

Sous l'hypothèse (H.3) (cf [Re-Si]), pour t réel, $H(t) = H + A(t)$ est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(H)$, et le spectre de $H(t)$ dans $]0, \epsilon_0[$ est discret.

Soit $\varphi \in D(H)$, $\psi \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in]0, \epsilon_0[$. On note $\varphi_+ = \Pi_+ \varphi$ et $\varphi_- = \Pi_- \varphi$. Alors

$$(1.1) \qquad (H(t) - \lambda)\varphi = \psi \Leftrightarrow \begin{cases} (H_+ + A_{++}(t) - \lambda)\varphi_+ + A_{+-}(t)\varphi_- = \psi_+ \\ (H_- + A_{--}(t) - \lambda)\varphi_- + A_{-+}(t)\varphi_+ = \psi_- \end{cases}$$

où $H_\epsilon = \Pi_\epsilon H \Pi_\epsilon = \Pi_\epsilon H = H\Pi_\epsilon$ et $A_{\epsilon\epsilon'}(t) = \Pi_\epsilon A(t) \Pi_{\epsilon'}$ avec $\epsilon, \epsilon' \in \{+, -\}$.

Pour $\lambda > 0$, $\Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_-$ est borné de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$. Ainsi d'après les hypothèses (H.1) a) et c), et (H.3) c), pour $\lambda > 0$ suffisamment proche de 0 et t assez petit, $1 - (\lambda - H_-)^{-1} A_{--}(0)$ est inversible de $\mathcal{A}_1^*$ dans lui-même, donc de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_1$. Donc $\Pi_-(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1}\Pi_- = (1 - (\lambda - H_-)^{-1} A_{--}(0))^{-1} \Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_-$ est borné de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$. Ainsi (1.1) devient

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Pi_-(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1} \cdot A_{-+}(t)\varphi_+ - (\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1}\psi_- = \varphi_- \\ (L_+(t,\lambda) - \lambda)\varphi_- = \psi_+ + A_{+-}(t)(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1}\psi_- \end{cases}$$

où $L_+(t, \lambda)$ est l'opérateur de Livsic (cf [Or], [Ho]) défini par

$$L_+(t,\lambda) = H_+ + A_{++}(t) + A_{+-}(t)(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1} A_{-+}(t).$$

Pour $\lambda \in]0, \epsilon_0[$, on définit

$$R_-(t,\lambda) = \Pi_-(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1}\Pi_-.$$

On a la

Proposition 1.1. *Sous les hypothèses (H.1)-(H.3), il existe $\epsilon > 0$, $\Gamma_+(t, \lambda, z)$, une fonction analytique de $B_{\mathbb{C}^3}(0, \epsilon)$ à valeurs dans les opérateurs H_+-compacts sur $\mathcal{H}_0$ et $R_-(t, \lambda, z)$, une fonction analytique de $B_{\mathbb{C}^3}(0, \epsilon)$ à valeurs dans les opérateurs bornés de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$ telles que, si $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0, \epsilon_0) \backslash] - \epsilon_0, 0[$ et $S(\lambda) \in B_{\mathbb{C}}(0, \epsilon)$, alors*

$$\Gamma_+(t, \lambda, S(\lambda)) + H_+ = L_+(t, \lambda)$$

et

$$R_-(t, \lambda, S(\lambda)) = R_-(t, \lambda)$$

Si z, t et λ sont tous trois réels, l'opérateur $\Gamma_+(t, \lambda, z)$ est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, et l'opérateur $R_-(t, \lambda, z)$ symétrique sur $\mathcal{A}_0$ (i.e $\langle R_-(t, \lambda, z)\phi, \psi\rangle = \langle \phi, R_-(t, \lambda, z)\psi\rangle$ pour ϕ et ψ dans $\mathcal{A}_0$).

Preuve de la Proposition 1.1. Pour $\lambda \notin \sigma(H)$, on écrit

$$\Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_- = (\lambda - H)^{-1} - \Pi_+(\lambda - H_+)^{-1}\Pi_+$$

or, $\Pi_+(\lambda - H_+)^{-1}\Pi_+$ est analytique borné de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$, donc de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$, pour λ dans un voisinage de 0 (comme le spectre de H_+ ne contient pas ce voisinage de 0) donc, par l'hypothèse (H.1),

$$\Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_- = F_-(\lambda) + S(\lambda)\cdot G_-(\lambda)$$

où F_- et G_- ont les mêmes propriétés que F et G (car H_+ est auto-adjoint).

Pour $\lambda > 0$ et λ voisin de 0, on écrit, en prenant soin de conserver la symétrie des expressions,

$$\begin{aligned}
R_-(t,\lambda) &= \Pi_-(\lambda - H_- - A_{--}(t))^{-1}\Pi_- \\
&= \frac{1}{2}\{\ \Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_-(1 - A_{--}(t)(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_-)^{-1}\Pi_- \\
&\qquad + \Pi_-(1 - \Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}A_{--}(t))^{-1}\Pi_-(\lambda - H_-)^{-1}\Pi_-\ \} \\
&= \frac{1}{2}\{\ (F_-(\lambda) + S(\lambda)\cdot G_-(\lambda))(1 - A_{--}(t)F_-(\lambda) - S(\lambda)A_{--}(t)G_-(\lambda))^{-1}\Pi_- \\
&\qquad + \Pi_-(1 - F_-(\lambda)A_{--}(t) - S(\lambda)G_-(\lambda)A_{--}(t))^{-1}(F_-(\lambda) + S(\lambda)\cdot G_-(\lambda))\ \}\,.
\end{aligned}$$

Pour $(t,\lambda,u) \in B_{\mathbb{C}^3}(0,\epsilon)$, définissons les opérateurs

$$\begin{aligned}
R_-(t,\lambda,u) = \frac{1}{2}\{\ &(F_-(\lambda) + u\cdot G_-(\lambda))(1 - A_{--}(t)F_-(\lambda) - u\cdot A_{--}(t)G_-(\lambda))^{-1}\Pi_- \\
&+ \Pi_-(1 - F_-(\lambda)A_{--}(t) - u\cdot G_-(\lambda)A_{--}(t))^{-1}(F_-(\lambda) + u\cdot G_-(\lambda)\ )\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\Gamma_+(t,\lambda,u) = A_{++}(t) + A_{+-}(t)R_-(t,\lambda,u)A_{-+}(t). \tag{1.4}$$

On vérifie aisément que, pour (t,λ) tels que $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0,\epsilon_0)\backslash]-\epsilon_0,0]$ et $(t,S(\lambda)) \in B_{\mathbb{C}^2}(0,\epsilon)$, on a $R_-(t,\lambda,S(\lambda)) = R_-(t,\lambda)$ et $L_+(t,\lambda) = H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,S(\lambda))$. Par ce qui a été dit ci-dessus, il est clair que $R_-(t,\lambda,u)$ est borné de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$. Pour t, λ et u réels, la symétrie de $R_-(t,\lambda,u)$ découle immédiatement de celles de $A(t)$, F et G et de la symétrie imposée dans la définition de $R_-(t,\lambda,u)$. Ceci entraine alors que $\Gamma_+(t,\lambda,u)$ est symétrique.

Comme $A(t)$ est compact de $\mathcal{A}_1^*$ dans $\mathcal{A}_0$, il est en particulier H-compact sur $\mathcal{H}_0$. Donc $A_{++}(t)$ est H_+-compact. Pour λ voisin de 0, $(\lambda - H_+)^{-1}$ est borné dans $\mathcal{H}_0$ et $A_{-+}(t)(\lambda - H_+)^{-1}$ est compact. De plus, $A_{+-}(t)$ est compact de $\mathcal{A}_1^*$ dans $\mathcal{A}_0$ et $R_-(t,\lambda,u)$ est borné de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$, donc $\Gamma_+(t,\lambda,u)$ est H_+-compact. Ce qui implique que $\Gamma_+(t,\lambda,u)$ est auto-adjoint pour t, λ et u réels.

Équation aux valeurs propres.

On sait que le spectre de H_+ est contenu dans $[\epsilon_0,+\infty[$; ainsi, au voisinage de 0, le spectre de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$ est discret. Soient $(\mu_j(t,\lambda,u))_{1\le j\le m}$, les valeurs propres de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$ dans $D(0,\epsilon_0)$. Comme $\Gamma_+(t,\lambda,u)$ est analytique en (t,λ,u) et H_+-compact, on peut appliquer la théorie des perturbations analytiques à $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$. Entre autre, si μ_0 est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t_0,\lambda_0,u_0)$, alors il existe $(t,\lambda,u,\mu) \mapsto k(t,\lambda,u,\mu)$, une application analytique définie dans W, un voisinage de $(t_0,\lambda_0,u_0,\mu_0)$ telle que
(i) $k(t_0,\lambda_0,u_0,\mu_0) = 0$,
(ii) pour $(t,\lambda,u,\mu) \in W$, μ est valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$ si et seulement si $k(t,\lambda,u,\mu) = 0$.

Si μ_0 est une valeur propre simple de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$, alors on peut choisir $k(t,\lambda,u,\mu) = \mu - \mu(t,\lambda,u)$ où $(t,\lambda,u,\mu) \mapsto \mu(t,\lambda,u)$, une application analytique définie dans un voisinage de

(t_0, λ_0, u_0); $\mu(t, \lambda, u)$ sera une valeur propre simple de $H_+ + \Gamma_+(t, \lambda, u)$. De plus, il existe $\varphi(t, \lambda, u)$ un vecteur propre unitaire associé à $\mu(t, \lambda, u)$ qui est analytique en (t, λ, u).

Comme $H_+ + \Gamma_+(t, \lambda, u)$ est auto-adjoint quand (t, λ, u) sont réels, on sait que $k(t, \lambda, u, \mu)$ est réelle pour (t, λ, u, μ) réels.

Remarque. Il n'est pas difficile de voir que, de façon générique, on peut supposer que l'on se trouve dans le cas d'une valeur propre simple.

6. Prolongement de la résolvante de l'opérateur perturbé.

On rajoute un point $\overline{0}$ à $\mathcal{R}_\epsilon$ et on prolonge $\tilde{S}$ par continuité à ce point en posant $\tilde{S}(\overline{0}) = 0$. La façon de rajouter ce point dépend de la singularité de S en 0.

Considérons $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon := \tilde{S}^{-1}(D_{\mathbb{C}}(0, \epsilon))$. C'est un ouvert de $\mathcal{R}_\epsilon$. On peut alors naturellement prolonger analytiquement R_- comme opérateur borné de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$ et L_+ comme perturbation H_+-compacte de H_+ à $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$ de la façon suivante: pour $z \in \tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$,

$$R_-(t, z) = R_-(t, \rho(z), \tilde{S}(z)) \text{ et } L_+(t, z) = H_+ + \Gamma_+(t, \rho(z), \tilde{S}(z)).$$

Le fait que, pour t assez petit, $R_-(t, \lambda)$ se prolonge holomorphiquement et non méromorphiquement c'est-à-dire que $R_-(t, \lambda)$ n'ait pas de pôles au voisinage de 0, est dû à ce que $1 - F(0)\Pi_- A(0)\Pi_-$ est inversible.

De la proposition 1.1, on conclut immédiatement le

Théorème 1.2. *Supposons que (H.1)-(H.3) sont vérifiées. Il existe $\epsilon > 0$, tel que pour $t \in B(0, \epsilon)$, on peut construire un prolongement holomorphe de $L_+(t, z)$ à $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$ (en tant que perturbation H_+-compact de H_+) et $R(t, z)$, un prolongement méromorphe de $(\lambda - H(t))^{-1}$ à $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$ (en tant qu'opérateur borné de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_1^*$).*

De plus, z est un pôle de $R(t, z)$ si et seulement si $\rho(z)$ est valeur propre de $L_+(t, z)$.

Définition 1.3. Les pôles de $R(t, z)$ sont appelés les résonances de $H(t)$.

On remarquera qu'ici on ne distingue pas les résonances des valeurs propres. On dira qu'une résonance est simple si c'est un pôle simple c'est-à-dire si $\rho(z)$ est une valeur propre simple de $L_+(t, z)$.

Définition 1.4. *On dira qu'une fonction ϕ est une fonction résonante pour $H(t)$ associée à la résonance z si ϕ est dans le noyau de $L_+(t, z) - \rho(z)$. Soit $\mathbb{E} \subset \tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$. On appellera espace résonant associé à $\mathbb{E}$ et à $H(t)$, la somme directe des espaces propres géneralisés associés à $L_+(t, z)$ et $\rho(z)$ pour $\lambda \in \mathbb{E}$.*

Remarque. Notons que cette étude n'a d'intérêt que si $[A(t), \Pi_+] \neq 0 \neq [A(t), \Pi_-]$. En effet, dans le cas contraire, le système d'équations (1.1) est découplé. Comme $R_-(t, \lambda)$ se prolonge holomorphiquement, la seconde équation ne crée pas de pôles et la première crée au plus des valeurs propres qui peuvent être plongées dans le spectre essentiel de H. Les éventuelles résonances proviennent du couplage entre $A(t)$ et H.

Preuve du Théorème 1.2. D'après (1.2) et la Proposition 1.1, pour $\lambda \in D_{\mathbb{C}}(0, \epsilon_0) \backslash] - \epsilon_0, 0]$, pour calculer $(\lambda - H(t))^{-1}\psi$ pour $\psi \in \mathcal{A}_0$, il suffit de pouvoir inverser $L_+(t, \lambda) - \lambda$ sur $\mathcal{H}$. On remarque que

$$L_+(t, \lambda) - \lambda = (1 + \Gamma_+(t, \lambda, S(\lambda))(H_+ - \lambda)^{-1})(H_+ - \lambda).$$

Or, pour λ voisin de 0, $\lambda \notin \sigma(H_+)$ (par la remarque suivant l'hypothèse (H.1)) et on a

$$\| (H_+ - \lambda)^{-1} \|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{| \epsilon_0 - \lambda |}.$$

Comme, par la Proposition 1.1, $\Gamma_+(t, \lambda, S(\lambda))$ est H_+-compact, $L_+(t,\lambda) - \lambda$ est inversible si et seulement si λ n'est pas valeur propre de $L_+(t, \lambda)$. En utilisant alors les prolongements analytiques construits pour R_- et L_+, on obtient le Théorème 1.2.

II) Éclatement des résonances.

1. Différents types de ramification.

Nous étudions l'éclatement d'une résonance z_0 de $H(0)$ en résonances de $H(t)$ quand t varie au voisinage de 0.

Le cas où z_0 n'est pas au seuil, c'est-à-dire si $\rho(z_0) \neq 0$, est traité en 2. Le cas très intéressant où $z_0 = \overline{0}$, le point rajouté à $\mathcal{R}_\epsilon$ est plus délicat. Pour l'étudier il faut préciser la manière dont on peut ajouter un point à $\mathcal{R}_\epsilon$. On le fait pour deux types de singularités de S:

a) type rationnel $S(z) = z^{\frac{p}{q}}$ avec $\frac{p}{q}$ rationnel positif non entier,

b) type logarithmique $S(z) = z^p \cdot \log(z)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

(On considère ici les branches principales de la racine q-ième et du logarithme).

Remarque. Rappelons que dans les applications à Schrödinger dans $\mathbb{R}^n$, on a $S(\lambda) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}$ pour n impair (type rationnel), et $S(\lambda) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \log \lambda$ pour n pair (type logarithmique).

2. Cas où la résonance n'est pas au seuil.

Supposons que (H.1)-(H.3) sont vérifiées. Supposons que $z_0 \in \tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$ est une résonance de $H(t_0)$. Par définition, $\rho(z_0)$ est alors une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t, \rho(z_0), \tilde{S}(z_0))$. Donc, il existe $k(t,z)$, une fonction analytique sur $U \times V$, un voisinage de (t_0, z_0), telle que

1) $h(t_0, z_0) = 0$,

2) pour $(t, z) \in U \times V$, (z est une résonance de $H(t)$) $\Longleftrightarrow$ ($h(t,z) = 0$).

Remarquons que si $\partial_z(h(t,z) - \rho(z))_{|z_0} \neq 0$, alors on peut trouver $t \mapsto z(t)$, une application analytique d'un voisinage de t_0 dans un voisinage de z_0 tel que $z(t)$ est l'unique résonance de $H(t)$ dans le voisinage de z_0 considéré. Dans le cas où z_0 est une résonance simple de $H(t_0)$, pour t voisin de t_0, il n'y a qu'une résonance de $H(t_0)$ voisine de z_0 et celle-ci est simple.

Remarque. Ce cas recouvre d'une certaine manière celui traité par A. Orth [Or].

3. Résonance en un seuil de type rationnel. $\mathbf{S(z) = z^{\frac{p}{q}}}$.

Il est classique qu'on obtient une surface de Riemann régulière en rajoutant un point à $\mathcal{R}_\epsilon$. Plus précisément, on définit $\mathcal{R}(q, \epsilon) = \{\zeta = (z, z^q);\ z \in D(0, \epsilon)\} \subset \mathbb{C}^2$, le graphe de la puissance q-ième restreinte à $D(0, \epsilon^q)$. Alors $\mathcal{R}_\epsilon = \mathcal{R}(q, \epsilon) \setminus (0,0)$ et $\overline{0} = (0,0)$. L'application ρ est définie par $\rho(z) = z^q$ et $\tilde{S}(z) = z^p$ (ici on utilise l'identification $\rho_1 :\ \zeta \in \mathcal{R}(q, \epsilon) \leftrightarrow z \in D(0, \epsilon)$).

On prolonge alors la résolvante $R(t, \zeta)$ à $\mathcal{R}_\epsilon$; $z \in \mathcal{R}_\epsilon$ sera une résonance de $H(t)$ si et seulement si z^q est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t, z^q, z^p)$.

Supposons que $\overline{0}$ est une résonance de $H(0)$ c'est-à-dire que $0 = \rho(\overline{0})$ est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(0,0,0)$. Ainsi, il existe une équation au valeurs propres $k(t, \lambda, u, \mu)$ analytique telle que
(i) $k(0,0,0,0) = 0$,

(ii) pour $(t,\lambda,u,\mu) \in D(0,\epsilon)^4$, μ est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$ si et seulement si $k(t,\lambda,u,\mu) = 0$.
On obtient donc l'équation aux résonances suivante pour $H(t)$,

$$h(t,z) := k(t, z^q, z^p, z^q) = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'analyticité de k,

$$h(t,z) = a_{1,0,0}t + a_{0,1,0}z^q + a_{0,0,1}z^p + \sum_{\substack{j+k+l\geq 2\\ j,k,l\geq 0}} a_{j,k,l}t^j z^{qk+pl} = 0. \tag{2.1}$$

Rappelons que les coefficients $(a_{j,k,l})_{j,k,l}$ sont réels.

Hypothèse générique.
(H.4)
$a_{1,0,0} \neq 0$, $a_{0,1,0} \neq 0$ et $a_{0,0,1} \neq 0$.

Remarque. Les trois hypothèses de (H.4) ne sont pas toutes nécessaires en même temps. En effet comme le montre la preuve du Théorème 2.1, si $p > q$, il suffit de supposer $a_{1,0,0} \neq 0$ et $a_{0,1,0} \neq 0$. Et si $p < q$, il suffit de supposer $a_{1,0,0} \neq 0$ et $a_{0,0,1} \neq 0$.

Il est facile de montrer que l'hypothèse $a_{1,0,0} \neq 0$ est vérifiée pour presque toute perturbation. La généricité des deux autres hypothèses sera discutée dans la conclusion.

Alors, on extrait les racines $z(t)$ de l'équation (2.1) et on obtient le

Théorème 2.1. *Soit $m = \min(p,q)$. Supposons que $\overline{0}$ soit une résonance de $H(0)$ et que les hy-pothèses (H.1)-(H. 4) soient vérifiées. Alors, il existe m résonances de $H(t)$ près de $\overline{0}$ pour $t \neq 0$. Plus précisément, il existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ et f, une fonction analytique de $D(0,\epsilon_1)$ dans $D(0,\epsilon_2)$ (dont les coefficients de Taylor sont réels et telle que $f(0) = 0$) tels que si on définit*

$$\begin{tikzcd}
D(0,\epsilon_1) \arrow[r, "f"] & D(0,\epsilon_2) \arrow[d, "\rho_1^{-1}"] \\
\mathcal{R}(m,\epsilon_1) \arrow[u, "\rho_1"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{R}_{\epsilon_2} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
D(0,\epsilon_1^m) \arrow[r, "\Lambda"'] & \mathcal{R}_{\epsilon_2}
\end{tikzcd} \qquad \text{où} \quad F = \rho_1^{-1} \circ f \circ \rho_1$$

alors, pour $t \in D(0,\epsilon_1^m)$, $\Lambda(t) = F(\rho^{-1}(t)) = \{\lambda_0(t),\ldots,\lambda_{m-1}(t)\}$ est l'ensemble des résonances de $H(t)$ contenues dans $\mathcal{R}_{\epsilon_2}$.

Preuve du Théorème 2.1. On peut supposer sans restrictions que $m = p$ (i.e $p < q$). On va résoudre (2.1). Pour cela, on pose $t = u^p$. On a le

Lemme 2.2. *Supposons qu'il existe $u \mapsto z(u)$ une application continue au voisinage de 0 et telle que $z(0) = 0$ qui vérifie $h(u^p, z(u)) = 0$ pour u voisin de 0. Alors, il existe $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ tel que*

$$z(u) = u \cdot e^{2i\pi\frac{k}{p}} \sqrt[p]{-\frac{a_{1,0,0}}{a_{0,0,1}}}(1+o(1)) \ \text{quand } u \to 0,$$

où $\sqrt[p]{\cdot}$ est la branche principal de la racine p-ième.

Preuve. En substituant $z(u)$ dans (2.1), on obtient

$$a_{1,0,0}u^p(1+\alpha(u)) = -a_{0,0,1}z(u)^p(1+\beta(u)),$$

où α et β sont continues au voisinage de 0 et $\alpha(0)=\beta(0)=0$. Donc

$$\left(\frac{z(u)}{\delta_0 u}\right)^p = (1+\gamma(u)) \text{ où } \gamma(u) \text{ continue au voisinage de } 0,\ \gamma(0)=0 \text{ et } \delta_0 = \sqrt[p]{-\frac{a_{1,0,0}}{a_{0,0,1}}}.$$

Ainsi, pour u voisin de 0 non nul,

$$z(u) = \delta_0 e^{2i\pi\frac{k(u)}{p}} u \sqrt[p]{1+\gamma(u)} \text{ où } k(u) \in \{0,\ldots,p-1\},$$

donc, comme $u \mapsto z(u)$ est supposée continue au voisinage de 0, $u \to k(u)$ est constante sur un voisinage de 0. Ceci achève la preuve du Lemme 2.2.

On va maintenant résoudre (2.1) en prenant $t=u^p$ et en cherchant z sous la forme suivante

$$z = \delta_k \cdot u \cdot (1+f(u)) \text{ où } \delta_k = e^{2i\pi\frac{k}{p}} \sqrt[p]{-\frac{a_{1,0,0}}{a_{0,0,1}}}.$$

En substituant cette expression dans (2.1), on obtient l'équation

$$a_{1,0,0}(1-(1+f(u))^p)u^p + a_{0,1,0}\delta_k^q(1+f(u))^q u^q + \sum_{\substack{j+k+l\geq 2\\ j,k,l\geq 0}} a_{j,k,l}u^{p(j+l)+qk}(\delta_k(1+f(u)))^{qk+pl} = 0,$$

soit encore pour $u \neq 0$,

$$g_k(u, f(u)) = 0,$$

où

$$g_k(u,f) = a_{1,0,0}(1-(1+f)^p) + a_{0,1,0}\delta_k^q(1+f)^q u^{q-p} + \sum_{\substack{j+k+l\geq 2\\ j,k,l\geq 0}} a_{j,k,l}u^{p(j+l-1)+qk}(\delta_k(1+f))^{qk+pl},$$

On a $g_k(0,0)=0$ et $\partial_f g_k(0,0) = -pa_{1,0,0} \neq 0$. Donc, par le théorème des fonctions implicites holomorphes, il existe $u \mapsto f_k(u)$, une application analytique définie sur U, un voisinage de 0, et telle que, pour $u \in U$, $g_k(u, f_k(u)) = 0$. On peut remarquer que

$$0 = g_0(e^{2i\pi\frac{k}{p}}u, f_0(e^{2i\pi\frac{k}{p}}u)) = g_k(u, f_0(e^{2i\pi\frac{k}{p}}u)) = g_k(u, f_k(u)) \text{ et } f_k(0) = 0 = f_0(0),$$

ainsi on conclut par l'unicité dans le théorème des fonctions implicites, que $f_k(u) = f_0(e^{2i\pi\frac{k}{p}}u)$.

Finalement, on a obtenu que les solutions $z(t)$ de (2.1) sont de la forme $z(t) = \delta_0 u(1+f_0(u))$ avec $t=u^p$ pour t dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$.

Projetés des résonances.

Les projetés sur la base de $\mathcal{R}(q,\epsilon_2)$ des résonances obtenues dans le Théorème 2.1 sont, pour $0 \leq k \leq m-1$,

$$\lambda_k(t) = f_1 \cdot e^{2i\pi\frac{kq}{m}} t^{\frac{q}{m}} \left(1 + \tilde{f}(e^{2i\pi\frac{k}{m}} t^{\frac{1}{m}})\right)^q, \tag{2.2}$$

si $f(z) = f_1 \cdot z \cdot (1 + \tilde{f}(z))$ où $\tilde{f}$ est analytique au voisinage de 0 et $\tilde{f}(0) = 0$. Ainsi, si $q < p$ (i.e $m = q$), le comportement des résonances est linéaire en t alors qu'il est de type puissance fractionnaire si $p < q$.

Discussion.

On a supposé $q > 1$. Si $m = p = 1$ on obtient pour t petit une unique résonance simple au voisinage du seuil. Par contre si $m > 1$, il apparait plusieurs résonances; plus exactement, si $1 < q < p$, il apparait exactement une résonance sur chaque feuillet de $\mathcal{R}_{\epsilon_2}$, et si $1 < p < q$, alors il n'apparait de résonances que sur certains feuillets de $\mathcal{R}_{\epsilon_2}$. Remarquons que le phénomène d'éclatement ne provient pas de la multiplicité de la résonance en $\overline{0}$, c'est-à-dire que même si cette résonance est simple, il y a un éclatement.

4.Résonance en un seuil de type logarithmique. $\mathbf{S(z) = z^p \cdot \log(z)}$ avec $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas-ci, le problème vient de ce que $z^p \cdot \log(z)$ admet une singularité essentielle en 0 en plus de la ramification. Pour uniformiser S, on utilise le revêtement universel que l'on utilise pour uniformiser le logarithme. Soit $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon = \{\zeta = (z, e^z);\ z \in \mathbb{C} \text{ et } \mathrm{Re}(z) < \log\epsilon\}$. On uniformise $S(z) = z^p \cdot \log z$ de la façon suivante

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho_1"] & D(0,\epsilon) \setminus \{0\} \arrow[d, "S"] \\
\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) < \log\epsilon\} \arrow[r, "\tilde{S}(z) = z\cdot e^{pz}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Ici ρ_1 est la projection sur la première coordonnée et, ρ celle sur la seconde. On va maintenant restreindre $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$ à un ouvert de façon à ce que $\tilde{S}$, l'uniformisation de S sur cet ouvert soit à valeur dans $D(0,\epsilon)$ et de plus puisse être prolongée par continuité au point $(-\infty, 0)$ sur cet ouvert. Soit $\nu > 0$. On définit $\mathcal{R}_{\epsilon,\nu} = \{\zeta = (z, e^z) \in \tilde{\mathcal{R}}_\epsilon;\ (p+\nu)\cdot\mathrm{Re}(z) + \mid z \mid < \log\epsilon\}$. On vérifie aisément que:
(i) $\mathcal{R}_{\epsilon,\nu}$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon$,
(ii) pour $\zeta \in \mathcal{R}_{\epsilon,\nu}$, $\mid \tilde{S} \circ \rho_1(\zeta) \mid < \epsilon$,
(iii) pour $\zeta \in \mathcal{R}_{\epsilon,\nu}$, si $\mathrm{Re}(\rho_1(\zeta)) \to -\infty$ alors $\tilde{S} \circ \rho_1(\zeta) \to 0$.

On peut alors compactifier $\mathcal{R}_{\epsilon,\nu}$ en lui ajoutant un point noté $\overline{0} = (-\infty, 0)$ et prolonger $\tilde{S} \circ \rho_1$ par continuité à cette compactification par $\tilde{S} \circ \rho_1(\overline{0}) = 0$. $\overline{0}$ est le point de ramification dans ce cas-ci. On définit $C_{\nu,\epsilon} = \rho_1(\mathcal{R}_{\nu.\epsilon}) = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < \log\epsilon \text{ et } (p+\nu)\cdot\mathrm{Re}(z) + \mid z \mid < \log\epsilon\}$.

Supposons que $\overline{0}$ est une résonance de $H(0)$ donc $0 = \rho(\overline{0})$ est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(0,0,0)$. Ainsi, il existe une équation aux valeurs propres analytique $k(t,\lambda,u,\mu)$ telle que
(i) $k(0,0,0,0) = 0$,
(ii) pour $(t,\lambda,u,\mu) \in D(0,\epsilon)^4$, μ est une valeur propre de $H_+ + \Gamma_+(t,\lambda,u)$ si et seulement si $k(t,\lambda,u,\mu) = 0$.

Donc, pour $t \in D(0,\epsilon)$, $\zeta \in \mathcal{R}_{\epsilon,\nu}$ est une résonance de $H(t)$ si et seulement si

$$k(t, \rho(\zeta), S \circ \rho(\zeta), \rho(\zeta)) = 0. \tag{2.3}$$

Donc en utilisant le développement en série entière de k au voisinage de $(0,0,0,0)$ et les définitions de S et ρ, (2.3) devient

$$h(t,z) = a_{1,0,0}t + a_{0,1,0}ze^{pz} + a_{0,0,1}e^{z} + \sum_{\substack{j+k+l\geq 2\\ j,k,l\geq 0}} a_{j,k,l}t^j z^k e^{(pk+l)z} = 0. \tag{2.4}$$

Rappelons que les coefficients $(a_{j,k,l})_{j,k,l}$ sont réels.

Hypothèse générique.
(H.4 bis)
$a_{1,0,0} \neq 0$, $a_{0,1,0} \neq 0$ et $a_{0,0,1} \neq 0$.

Remarque. La remarque faisant suite à l'hypothèse (H.4) s'applique ici, à la nuance suivante près: il suffit de supposer $a_{1,0,0} \neq 0$ et $a_{0,1,0} \neq 0$ si $p = 1$, et $a_{1,0,0} \neq 0$ et $a_{0,0,1} \neq 0$ si $p > 1$.

Théorème 2.3. *Supposons que $\overline{0}$ est une résonance de $H(0)$, et supposons les hypothèses (H.1)-(H.4 bis) vérifiées. Alors, asymptotiquement, il existe une infinité de résonances au voisinage de $\overline{0}$. Plus pécisément, pour $\nu > 0$, il existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ et f, une fonction analytique de C_{ν,ϵ_1} dans C_{ν,ϵ_2} tels que si on définit*

$$\begin{tikzcd}
C_{\nu,\epsilon_1} \arrow[r, "f"] & C_{\nu,\epsilon_2} \arrow[d, "\rho_1^{-1}"] \\
\mathcal{R}_{\epsilon_1,\nu} \arrow[u, "\rho_1"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{R}_{\epsilon_2,\nu} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
D(0,\epsilon_1^m) \arrow[r, "\Lambda"'] & \mathcal{R}_{\epsilon_2,\nu}
\end{tikzcd} \quad \textit{où} \quad F = \rho_1^{-1} \circ f \circ \rho_1$$

alors, pour $t \in D(0,\epsilon_1^m)$, $\Lambda(t) = F(\rho^{-1}(t)) = \{\lambda_j(t); -n(t) \leq j \leq n(t)\}$ ($n(t) \in \mathbb{N}$) est l'ensemble des résonances de $H(t)$ contenues dans $\mathcal{R}_{\epsilon_2,\nu}$.

De plus, on a les asymptotiques suivantes sur f:
(i) si $p > 1$: pour δ est définie par $e^\delta = -\dfrac{a_{1,0,0}}{a_{0,0,1}}$ et $0 \leq Im(\delta) \leq \pi$,

$$f(z) = z + \delta + h_p(z^{-1}, ze^{(p-1)z}e^z)$$

(ii) si $p = 1$: pour δ est définie par $e^\delta = -\dfrac{a_{1,0,0}}{a_{0,1,0}}$ et $0 \leq Im(\delta) \leq \pi$,

$$f(z) = z - \log z + \delta + h_1(z^{-1}, z^{-1}\log z, e^z)$$

où log *est la branche principal du logarithme et les fonctions h_p sont analytiques au voisinages de 0 dans toutes leurs variables et $h_p(0,0,0) = 0$.*

Remarque. La forme de $C_\nu(\epsilon)$ implique que $n(t) \to +\infty$ quand $t \to 0$.

Preuve du Théorème 2.3. On va procéder comme dans la preuve du Théorème 2.1. On prouvera d'abord le

Lemme 2.4. *Supposons qu'il existe $u \mapsto z(u)$, une application continue au voisinage $-\infty$ dans $C_{\nu,\epsilon}$ (où $\nu > 0$ et $\epsilon > 0$ sont fixés) et telle que*
(i) quand $Re(u) \to -\infty$, $z(u) \to 0$
(ii) $h(e^u, z(u)) = 0$ pour $Re(u)$ assez négatif.
Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
(i) si $p > 1$, $z(u) = u - \delta + 2ik\pi + o(1)$ pour $Re(u)$ assez négatif,
(ii) si $p = 1$, $z(u) = u - \log u + \delta + 2ik\pi + o(1)$ pour $Re(u)$ assez négatif,
où log *est la branche principal du logarithme et δ est défini dans le Théorème 2.3.*

Preuve. Si $p > 1$, comme au voisinage de $-\infty$, ze^{pz} est négligeable devant e^z, la preuve du Lemme 2.4 est exactement celle du Lemme 2.2.

Si $p = 1$, en substituant $z(u)$ et $t = e^u$ dans (2.4), on obtient

$$a_{1,0,0}e^u(1 + \alpha(u)) = -a_{0,0,1}z(u)e^{z(u)}(1 + \beta(u)),$$

où $\alpha(u) \to 0$ et $\beta(u) \to 0$ quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$. En prenant le logarithme de la formule précédente, on obtient pour $\mathrm{Re}(u)$ suffisamment négatif

$$u = v(u) + \log(v(u)) + 2ik(u)\pi + o(1) \tag{2.5}$$

où $o(1) \to 0$ quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$ et pour tout u, $k(u) \in \mathbb{Z}$. Donc, pour (u, u') assez négatifs,

$$\mid k(u) - k(u') \mid < \frac{1}{2} + C(\mid u - u' \mid + \mid v(u) - v(u') \mid).$$

Comme v est supposée continue et que $u \mapsto k(u)$ ne prend que des valeurs entières, $u \mapsto k(u)$ est localement constante au voisinage de $-\infty$, donc constante comme nous considérons des voisinages connexes. Alors par (2.5), on obtient que quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$, $u \sim v(u)$. On achève la preuve du Lemme 2.3 en réutilisant (2.5).

On ne traitera explicitement que le cas $p = 1$, le cas $p > 1$ étant plus simple à traiter. On va résoudre (2.4) en prenant $t = e^u$ et en cherchant z sous la forme $z = u - \log u + f(u)$ où δ est défini dans le Théorème 2.3 En substituant ces expressions dans (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} &a_{1,0,0}e^u - a_{1,0,0}\left(1 - u^{-1}\log u + u^{-1}f\right)e^u e^f + a_{0,0,1}e^u(\delta u)^{-1}e^f + \\ &\quad + \sum_{\substack{j+k+l \geq 2 \\ j,k,l \geq 0}} a_{j,k,l}e^{(k+l)\delta}e^{(j+k+l)u}u^{-l}\left(1 - u^{-1}\log u + (\delta + f)u^{-1}\right)^k e^{(k+lf} = \\ &\quad = H(f, u^{-1}, u^{-1}\log u, e^u) = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $(f, a, b, c) \mapsto H(f, a, b, c)$ est une application analytique au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ qui vérifie $H(0, 0, 0, 0) = 0$ et $\partial_f H(0, 0, 0, 0) = -a_{1,0,0}$. Par le théorème des fonctions implicites, on sait qu'il existe une fonction analytique $(a, b, c) \mapsto f(a, b, c)$ définie sur un voisinage de $(0, 0, 0)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$ et $H(f, a, b, c) = 0$ si et seulement si $f = f(a, b, c)$.

Pour résoudre (2.6), pour $u \in C_{\nu,\epsilon}$ et $\mathrm{Re}(u)$ assez négatif, on pose

$$z_0(u) = u - \log u + f(u^{-1}, u^{-1}\log u, e^u).$$

Remarquons que pour $k \in \mathbb{Z}$, $z_k(u) = z_0(u + 2ik\pi)$ est aussi solution de (2.4) (si u tel que $u + 2ik\pi \in C_{\nu,\epsilon}$).

Soit $u \mapsto w(u)$ une application continue au voisinage $-\infty$ dans $C_{\nu,\epsilon}$ (où $\nu > 0$ et $\epsilon > 0$ fixés) et telle que

(i) quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$, $w(u) \to 0$

(ii) $h(e^u, w(u)) = 0$ pour $\mathrm{Re}(u)$ assez négatif.

Alors par le Lemme 2.4, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $w(u) - z_k(u) = o(1)$ quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$. Donc, il existe $\theta(u) \in]0, 1[$ tel que

$$0 = h(e^u, w(u)) - h(e^u, z_k(u)) = (w(u) - z_k(u)) \cdot \partial_2 h(e^u, z_k(u) + \theta(u)(w(u) - z_k(u))).$$

On voit aisément que , quand $\mathrm{Re}(u) \to -\infty$,

$$\partial_2 h(e^u, z_k(u) + \theta(u)(w(u) - z_k(u))) = z_k(u) e^{-z_k(u)} \cdot (1 + o(1)).$$

On en conclut que pour $\mathrm{Re}(u)$ assez négatif, $w(u) = z_k(u)$. On a ainsi obtenu toutes les solutions de l'équation (2.4) en posant $z(t) = z_0(u)$ pour $t = e^u$. Ceci achève la preuve du Théorème 2.4.

Conclusion.

On a pu définir un prolongement méromorphe de la résolvante, sous des hypothèses assez générales. Ceci s'applique en particulier au cas de l'opérateur de Schrödinger périodique auquel on ajoute une perturbation à support compact. Pour l'opérateur de Schrödinger périodique, le prolongement de la résolvante est construit dans [Gé 2]. Au voisinage de l'extrémité supérieure d'une bande spectrale simple (il suffit que le bord de la bande que nous considérons soit simple), notre hypothèse (H.1) est satisfaite en dimension $n \geq 3$. Pour fixer les idées, supposons que cette extrémité est 0. Si on considère une perturbation de la forme $A(t) = tW$ où W est un potentiel non-négatif qui décroit suffisamment vite à l'infini (typiquement, une décroissance exponentielle) et $t_0 < 0$, notre hypothèse (H.3) est satisfaite pour t voisin de t_0.

Supposons que lorsque t décroit vers t_0, il existe $\lambda(t)$, une valeur propre de $H(t)$ qui tend vers 0. Alors en utilisant l'équation aux valeurs propres pour l'opérateur de Livsic dans ce cas, on a, pour $t > t_0$ assez proche de t_0, $k(t, \lambda(t), S(\lambda(t)), \lambda(t)) = 0$. Comme S et k sont continues, on a $k(t_0, 0, 0, 0) = 0$. On a donc une résonance au seuil pour $t = t_0$.

Vérifions les hypothèses (H.4) et (H.4 bis). Génériquement, la valeur propre 0 de $H_+ + \Gamma(t_0, 0, 0)$ peut être supposée simple; on note $\mu(t, \lambda, u)$ la branche de valeur propre correspondante.

Pour prouver que $a_{1,0,0} \neq 0$, génériquement, il suffit de perturber A par un projecteur choisi convenablement .

Maintenant, suivant la dimension n, nous discutons de la validité des hypothèses $a_{0,1,0} \neq 0$ et $a_{0,0,1} \neq 0$. On fera la discussion dans le cas n impair, donc $S(\lambda) = \lambda^{\frac{n-2}{2}}$. Si $n \geq 5$, alors $n - 2 > 2$; donc il s'agit de voir que $a_{0,1,0} \neq 0$, soit encore $\partial_\lambda \mu(t_0, 0, 0) - 1 \neq 0$. On calcule

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \Gamma_+(t_0, 0, 0) &= A_{+-}(t_0) \partial_\lambda R_-(t_0, 0, 0) A_{-+}(t_0) \\
&= \frac{1}{2} \{A_{+-}(t_0) \left(\partial_\lambda F_-(0) U + F_-(0) U A_{--}(t_0) \partial_\lambda F_-(0) U + \right. \\
&\qquad \left. + \ U^* \partial \lambda F_-(0) + U^* \partial_\lambda F_-(0) A_{--}(t_0) U^* F_-(0)\right) A_{-+}(t_0)\} \\
&= \frac{1}{2} A_{+-}(t_0) \{U^* \partial_\lambda F_-(0) U + U \partial_\lambda F_-(0) U^*\} A_{-+}(t_0) \\
&\qquad\qquad \text{où } U = (1 - A_{--}(t_0) F_-(0))^{-1},
\end{aligned}$$

car

$$1 + F_-(0) U A_{--}(t_0) = U^* \text{ et } 1 + A_{--}(t_0) U^* F_-(0) = U.$$

Mais, comme $\partial_\lambda S(0) = 0$, on vérifie aisément que $\partial_\lambda F_-(0) \le 0$, ainsi $\partial_\lambda \mu(t_0, 0, 0) \le 0$, c'est-à-dire $a_{0,1,0} \neq 0$.

Si $n = 3$, comme $n - 2 < 2$, il faut prouver que $a_{0,0,1} \neq 0$, c'est-à-dire $\partial_u \mu(t_0, 0, 0) \neq 0$. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on calcule

$$\begin{aligned}
\partial_u \Gamma_+(t_0, 0, 0) &= A_{+-}(t_0) \partial_u R_-(t_0, 0, 0) A_{-+}(t_0) \\
&= \frac{1}{2} \{A_{+-}(t_0) (G_-(0)U + F_-(0)UA_{--}(t_0)G_-(0)U + \\
&\qquad + U^*G_-(0) + U^*G_-(0)A_{--}(t_0)U^*F_-(0)) A_{-+}(t_0)\} \\
&= \frac{1}{2} A_{+-}(t_0) \{U^*G_-(0)U + UG_-(0)U^*\} A_{-+}(t_0).
\end{aligned}$$

D'aprè [Gé 2] (Theorem 3.6 et Corollary 3.7), on sait que si l'extrémité de la bande à laquelle on se place est simple, $G_-(0)$ peut s'écrire $G_-(0) = C_0 \langle \cdot, \varphi_0 \rangle \varphi_0$ où $\varphi_0 \in H^2_{-a}(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$H\varphi_0 = F(0)\varphi_0 = 0.$$

Ainsi, si φ est un vecteur propre unitaire associé à $\mu(t_0, 0, 0)$, on a

$$\partial_u \mu(t_0, 0, 0) = \langle \partial_u \Gamma_+(t_0, 0, 0)\varphi, \varphi \rangle = \frac{C_0}{2} \left(|\langle \varphi_0, UA_{-+}(t_0)\varphi|^2 + |\langle U\varphi_0, A_{-+}(t_0)\varphi|^2 \right).$$

Or $U\varphi_0 = \varphi_0$ donc

$$\partial_u \mu(t_0, 0, 0) = \frac{C_0}{2} \left(|\langle \varphi_0, UA_{-+}(t_0)\varphi|^2 + |\langle \varphi_0, A_{-+}(t_0)\varphi|^2 \right).$$

Donc en perturbant A, on peut s'arranger pour qu $\partial_u \mu(t_0, 0, 0) \neq 0$. Ce qui a été fait ici en dimension impaire est également valide en dimension paire.

Alors, pour répondre à la question de M. Sh. Birman, on peut dire les choses suivantes:
a) pour $n = 3$, on a $m = p = 1$ et $q = 2$; dans ce cas la surface de Riemann a deux feuillets. La valeur propre se transforme en résonance,
b) pour n impair $n > 3$, on a $m = q = 2$; dans ce cas la surface de Riemann a deux feuillets. Donc pour $t > t_0$ et t proche de t_0, il y a en plus de la valeur propre une autre résonance qui atteint le seuil en même temps que la valeur propre. Pour $t < t_0$ il y a deux résonances près du seuil,
c) en dimension paire > 2, pour $t > t_0$ et t proche de t_0, en plus de la valeur propre, il y a une résonance sur chaque feuillet de la surface de Riemann. La valeur propres et les résonances arrivent toutes ensemble au seuil et pour $t < t_0$, on retrouve une résonance sur chaque feuillet, la valeur propre s'étant transformée en résonance.

Dans [Kl], le lecteur trouvera des figures où sont représentées ces résonances dans un cas particulier.

Références

[A-D-H] S. Alama, P.A. Deift, R. Hempel, *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of sigma(H)*, Comm. math. Phys. **121** (1989), 291-321.

[Ba-Sk] E. Balslev, E. Skibstedt, *Resonance theory of two-body Schrödinger operators*, Ann. Inst. Henri Poincaré sér. Phys. Théor. **51** (1989), 129–154.

[Bi] M.S. Birman, *On the discrete spectrum in the gaps for a perturbed periodic second-order operator*, Funct. anal. appl. **25, 4** (1991), 158-161.

[C-F-K-S] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kisch, B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1987.

[Gé 1] C. Gérard, *Resonance theory in atom surface scattering*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 263–290.

[Gé 2] ———, *Resonance theory for periodic Schrödinger operators*, Bulletin de la SMF **118** (1990), 27-54.

[Ho] J. Howland, *The Livsic Matrix in perturbation theory*, J. Math. Anal. Apppl. **50** (1975), 415-437.

[Kl] F. Klopp, *Resonances for perturbations of a semi-classical periodic Schrödinger operator*, to appear in Arkiv för Math..

[Or] A. Orth, *Quantum mechanical resonance and limiting absorption: the many-body case*, Comm. math. Phys. **126** (1990), 559-573.

[Rai] G.D. Raikov, *Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with perturbed periodic potential*, Invent. math. **110** (1992), 75-93.

[Re-Si] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New-York, 1978.

Alain Grigis, Département de Maths, Institut Galilée, Université Paris-Nord, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse

E-mail address: grigis@math.univ-paris13.fr

Frédéric Klopp, Département de Mathématique, Bât. 425, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 91405 Orsay Cédex, France

Current address: Department of Mathematics, The Johns Hopkins University, 3400 N. Charles St., Baltimore, 21218 MD, U.S.A

E-mail address: kloppf@playmate.mat.jhu.edu