ЙОРДАНОВЫ УЗОРЫ НА АЛГЕБРАХ ЛИ И НЕГАМИЛЬТОНОВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Д.В.Юрьев

Многие важные классические гамильтоновы динамические системы связаны с алгебрами Ли [1,2] или их нелинейными обобщениями [3]. Взаимодействие гамильтоновых систем может быть либо гамильтоновым, т.е. задаваемым дополнительным членом взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$ в гамильтониане и, возможно, также некоторой деформацией исходных ("свободных") скобок Пуассона, либо негамильтоновым. Последний случай, отвечающий неконсервативным силам взаимодействия, представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Важной задачей является описание различных алгебраических структур, управляющих взаимодействием подобного типа. Существует по меньшей мере два подхода к етой задаче. При первом подходе негамильтоново взаимодействие связывается с деформациями исходных алгебраических структур (алгебр Ли), такими как, например, изотопические пары [4] и их нелинейные обобщения — I–пары [5]. При втором подходе указанное взаимодействие задаётся некототрыми дополнительными алгебраическими структурами на алгебрах Ли.

Определение 1. *Узором* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется $\mathfrak{g}$–эквивариантная алгебраическая структура на ней.

Данная работа посвящена определённому типу узоров на алгебрах Ли, который, как кажется, представляет особый интерес, и соответствующим негамильтоновым динамикам.

Определение 2. *Йордановым узором* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с коммутатором $[\cdot,\cdot]$ называется $\mathfrak{g}$–эквивариантная структура йордановой тройной системы на $\mathfrak{g}$ с трилинейной операцией $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$ такой, что $[A,\langle X,A,X\rangle]+[X,\langle A,X,A\rangle]=0$.

Напомним, что *йордановой тройной системой* [6] называется линейное пространство V с трилинейной операцией $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$, удовлетворяющей тождеству $\langle x,\langle a,z,b\rangle,y\rangle=\langle\langle x,a,y\rangle,b,z\rangle+\langle\langle y,a,z\rangle,b,x\rangle-\langle\langle x,b,y\rangle,a,z\rangle$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$, тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{A}:X^*=-X\}$ наделяется структурой йорданового узора с $\langle X,Y,Z\rangle=XYZ+ZYX$.

Пример 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с инвариантной билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ наделяется структурой йорданова узора с $\langle X,Y,Z\rangle = \langle X,Y\rangle Z + \langle Z,Y\rangle X$.

Алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с йордановым узором допускают две важные 4–линейные операции

$$\begin{aligned}\langle A,B|X,Y\rangle =&\tfrac{1}{2}([A,\langle X,B,Y\rangle]+[B,\langle X,A,Y\rangle]) = \\ &-\tfrac{1}{2}([X,\langle A,Y,B\rangle]+[Y,\langle A,X,B\rangle])\end{aligned}$$

и

$$[A,B]_{(X,Y)} = \tfrac{1}{2}((\langle [A,X],Y,B\rangle + [A,\langle X,B,Y\rangle] + (X\leftrightarrow Y)) - (A\leftrightarrow B).$$

Теорема 1. *Для любых элементов X и Y алгебры Ли $\mathfrak{g}$, снабжённой йордановым узором, операция $[\cdot,\cdot]_{(\cdot,\cdot)}$ задаёт на $\mathfrak{g}$ скобку Ли, согласованную с исходной скобкой $[\cdot,\cdot]$.*

Напомним, что I–*парой* [5] называется пара (V_1,V_2) линейных прос транств V_i с заданными (вообще говоря, нелинейными) отображениями $h_1 : V_2 \mapsto \mathrm{Hom}(\bigwedge^2(V_1),V_1)$, $h_2 : V_1 \mapsto \mathrm{Hom}(\bigwedge^2(V_2),V_2)$ такими, что $h_1(A)$ и $h_2(X)$ задают скобки Ли $[\cdot,\cdot]_A$ и $[\cdot,\cdot]_X$ на пространствах V_1 и V_2 для любых элементов A из V_2 и X из V_1, соответственно. таким образом, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с йордановым узором, то $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ является I–парой.

Определение 3. Дифференциальные уравнения

$$\begin{cases}\dot X_t =&\{\mathcal{H},X_t\}_{A_t} + \alpha\langle A_t,X_t,A_t\rangle\\ \dot A_t =&\{\mathcal{H},A_t\}_{X_t} - \alpha\langle X_t,A_t,X_t\rangle\end{cases}$$

где $\{\cdot,\cdot\}_Y$ — скобка Пуассона, отвечающая скобке Ли $[\cdot,\cdot]+\varepsilon[\cdot,\cdot]_{(Y,Y)}$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2+\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ — гамильтониан, являющийся суммой гамильтонианов $\mathcal{H}_i$ невзаимодействующих систем и гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$, называются *динамическими уравнениями, ассоциированными с йордановым узором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.*

Таким образом, динамические уравнения, ассоциированные с йордановым узором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, являются деформацией (по параметру α) динамических уравнений, ассоциированных с соответствующей I–парой $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ [5].

Если на $\mathfrak{g}$ задана невырожденная инвариантная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то имеет смысл рассматривать гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ в виде $a\langle X,A\rangle + b\langle\langle X,A,X\rangle,\rangle$. В этом случае динамические уравнения, ассоци ированные с йордановым узором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, имеют вид

$$\begin{cases}\dot X_t =&\{\mathcal{H}_t,X_t\}_{A_t} + a[A_t,X_t] + \alpha\langle A_t,X_t,A_t\rangle + 2b\langle A_t,A_t|X_t,X_t\rangle\\ \dot A_t =&\{\mathcal{H}_2,A_t\}_{X_t} - a[A_t,X_t] - \alpha\langle X_t,A_t,X_t\rangle - 2b\langle A_t,A_t|X_t,X_t\rangle\end{cases}$$

Рассмотрим простейший пример алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ (в этом случае йордановы узоры, задаваемые конструкциями примеров 1 и 2, совпадают), а также гамильтонианы ротаторов $\mathcal{H}_1 = \langle\Omega_1, X\rangle$, $\mathcal{H}_2 = \langle\Omega_2, A\rangle$ и $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Случай $a = b = \alpha = 0$ был проинтегрирован в [5], соответствующая динамика является почти периодической с периодами, зависящими от начальных условий, траектории движения лежат на инвариантных двумерных торах. рассмотрим два других более общих случая: случай 1 — произвольные α, a и b при $\varepsilon = 0$ и случай 2 — произвольные α и ε при $a = b = 0$.

Случай 1. Положим $\alpha = \alpha_0^2$, $\tau = \langle X, A\rangle$, $\rho = X^2 + A^2$, $\sigma = X^2 - A^2$. Тогда $\dot\tau = -2\alpha_0^2\tau\sigma$, $\dot\rho = 0$, $\dot\sigma = 8\alpha_0^2\tau^2$. Выразим τ через σ: $\tau = \frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{\frac{\dot\sigma}{2}}$ и подставим в уравнение для $\dot\tau$. Получим $\ddot\sigma = -4\alpha_0^2\dot\sigma\sigma$. Положим $\varkappa = \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2}$, тогда $\dot\sigma + 2\alpha_0^2\sigma^2 = 2\alpha_0^2\varkappa$ и $\sigma = \varkappa \operatorname{th}(2\varkappa\alpha_0^2 t + c_0)$, $\tau = \frac{\varkappa}{2\operatorname{ch}(2\varkappa\alpha_0^2 t + c_0)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} X^2 =& \tfrac{1}{2}(\rho + \varkappa \operatorname{th}(2\varkappa\alpha_0^2 t + c_0)) \\ A^2 =& \tfrac{1}{2}(\rho - \varkappa \operatorname{th}(2\varkappa\alpha_0^2 t + c_0)) \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $Y = X + A$ и $Z = X - A$, тогда

$$\begin{cases} \dot Z =& [\Omega, Z] + 2\alpha\tau Y + (a + 4b\tau)[Y, Z] \\ \dot Y =& [\Omega, Y] - 2\alpha\tau Z \end{cases}$$

при этом $Z^2 = \rho - 2\tau$, $Y^2 = \rho + 2\tau$, $\langle Y, Z\rangle = \sigma$. Положим $Z = \sqrt{\rho - 2\tau}z$, $Y = \sqrt{\rho + 2\tau}y$, тогда $\langle z, y\rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{\rho^2 - 4\tau^2}}$ и $y^2 = z^2 = 1$. Величины x и y удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot y =& [\Omega, y] + tfrac2\alpha\tau\rho + 2\tau(\sigma y - \sqrt{\rho^2 - 4\tau^2}z) \\ \dot z =& [\Omega, z] - \frac{2\alpha\tau\sigma}{\rho - 2\tau}z + 2\alpha\tau\sqrt{\frac{\rho + 2\tau}{\rho - 2\tau}}y + (a + 4b\tau)\sqrt{\rho + 2\tau}[y, z] \end{cases}$$

Исследуем асимптотическое поведение решений данной системы при $t \to \pm\infty$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} \dot y \sim& [\Omega, y] \\ \dot z \sim& [\Omega + a\sqrt{\rho}y, z] \end{cases}$$

Таким образом, динамика в этом случае является асимптотически почти периодической с периодами $\omega = \sqrt{\Omega^2}$ и ω' ($(\omega')^2 - \omega^2 = a^2\rho + 2a\sqrt{\rho}\omega\varkappa$, $\varkappa = \lim_{t\to\infty}\frac{\langle\Omega, y\rangle}{\omega}$). Отметим, что период ω' зависит от начальных условий.

Случай 2. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — канонический базис в $\mathfrak{so}(3)$. Положим $\Omega = \omega\mathbf{i}$ и разложим A и X по указанному базису: $A = a_i\mathbf{i} + a_j\mathbf{j} + a_k\mathbf{k}$, $B = b_i\mathbf{i} + b_j\mathbf{j} + b_k\mathbf{k}$; тогда динамические уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \dot a_i =& \varepsilon\omega x_i(x_j a_k - a_j x_k) + 2\alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k)x_i \\ \dot x_i =& \varepsilon\omega a_i(a_j x_k - a_k x_j) - 2\alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k)a_i \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dot a_j = & -\omega a_k + \varepsilon\omega x_j(x_j a_k - a_j x_k) + \alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k) x_j \\
\dot x_j = & -\omega x_k + \varepsilon\omega a_j(a_j x_k - a_k x_j) - \alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k) a_j \\
\dot a_k = & \omega a_j + \varepsilon\omega x_k(x_j a_k - a_j x_k) + \alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k) x_k \\
\dot x_k = & \omega x_j + \varepsilon\omega a_k(a_j x_k - a_k x_j) - \alpha(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k) a_k
\end{cases}
$$

Положим

$$
\mathcal{A}^2 = a_i^2 + x_i^2, \qquad a_i = \mathcal{A}\cos\chi, \quad x_i = \mathcal{A}\sin\chi,
$$

а также

$$
\begin{aligned}
a_j &= a_0\cos\varphi, \qquad & a_k &= a_0\sin\varphi, \\
x_j &= x_0\cos\psi, \qquad & x_k &= x_0\sin\psi
\end{aligned}
$$

и $\eta = \varphi - \psi$, $\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$.

Отметим, что $\mathcal{A}$ является интегралом движения, динамика χ определяется дифференциальным уравнением

$$
\dot\chi = -\varepsilon\omega a_0 x_0 \sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + 2a_0x_0\cos\eta),
$$

при этом

$$
\begin{cases}
(\dot a_0)^2 = & \varepsilon\omega a_0^2 x_0^2 \sin 2\eta + 2\alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + 2a_0x_0\cos\eta) a_0 x_0 \cos\eta \\
(\dot x_0)^2 = & -\varepsilon\omega a_0^2 x_0^2 \sin 2\eta - 2\alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + 2a_0x_0\cos\eta) a_0 x_0 \cos\eta
\end{cases}
$$

Положим $\mathcal{B}^2 = a_0^2 + x_0^2$, $a_0 = \mathcal{B}\cos\xi$, $x_0 = B\sin\xi$, B является интегралом движения. Как следствие,

$$
\begin{cases}
\dot\xi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{4}\sin 2\eta\sin 2\xi - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\cos\eta \\
\dot\chi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\sin 2\xi\sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)
\end{cases}
$$

а также

$$
\begin{cases}
\dot\varphi = & \omega - \varepsilon\omega x_0^2\sin^2\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\sin\eta \\
\dot\psi = & \omega - \varepsilon\omega a_0^2\sin^2\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\sin\eta
\end{cases}
$$

и

$$
\begin{cases}
\dot\eta = & \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\cos 2\xi \\
\dot\theta = & \omega - \frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\sin^2\eta - \alpha\sin\eta(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)
\end{cases}
$$

Таким образом, динамика допускает два интеграла движения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и определяется системой дифференциальных уравнений на η, ξ и χ:

$$
\begin{cases}
\dot\eta = & \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\cos 2\xi \\
\dot\xi = & -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{4}\sin 2\eta\sin 2\xi - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\cos\eta \\
\dot\chi = & -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\sin 2\xi\sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)
\end{cases}
$$

при этом θ выражается через η, χ и ξ:

$$\theta = \omega t - \tfrac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2} \int \sin^2\eta\, dt - \alpha \int \sin\eta(\mathcal{A}^2 \sin 2\chi + \mathcal{B}^2 \sin 2\xi \cos\eta)\, dt + \theta_0.$$

Общий случай представляет значительный интерес и требует специального численного анализа. Рассмотрим аналитически эволюцию системы при "нехарактерном" нулевом значении параметра $\mathcal{A}$. В этом случае

$$\chi = -\tfrac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2} \int \sin 2\xi \sin\eta\, dt - \alpha\mathcal{B}^2 \int \sin 2\xi \cos\eta\, dt + \chi_0,$$

в то время как

$$\begin{cases} \dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2 \sin^2\eta \cos 2\xi \\ \dot\xi = -\mathcal{B}^2 \sin 2\xi(\alpha + \tfrac{\varepsilon\omega}{2}\sin\eta)\cos^2\eta \end{cases}$$

Данная система допускает интеграл движения $K = \sin 2\xi \sin\eta \left[\operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2}\right]^{\frac{2\alpha}{\varepsilon\omega}}$, ввиду этого η удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2 \sin^2\eta \sqrt{1 - \tfrac{K^2}{\sin^2\eta}\left[\operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2}\right]^{-\frac{2\alpha}{\varepsilon\omega}}},$$

так что при $\mathcal{A} = 0$ динамические уравнения решаются в квадратурах. Необходимо также отметить, что эволюция η является периодической, и как следствие, негамильтонова динамика, ассоциированная с йордановым узором, является в случае 2 при $\mathcal{A} = 0$ почти периодической.

Рассмотренные случаи показывают, что негамильтоновы динамические уравнения, ассоциированные с йордановым узором, описывают различное качественное поведение динамических систем. Это позволяет предположить, что алгебраический аппарат йордановых узоров на алгебрах Ли может представлять эффективное средство для анализа асимптотически почти периодических динамических систем.

Автор благодарит Международный институт математической физики имени Эрвина Шрёдингера за поддержку и любезное гостеприимство.

References

[1] Арнольд В.И., Математические методы классической механики. М., Наука, 1970.

[2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия. М., Наука, 1987.

[3] Карасёв М.В., Маслов В.П., Нелинейные скобки Пуассона: геометрия и квантование. М., Наука, 1992.

[4] Juriev D., Topics in nonhamiltonian interaction of hamiltonian dynamic systems. E–print (Texas Archive on Math. Phys.): mp_arc/94-136.

[5] Juriev D., On the nonhamiltonian interaction of two rotators. E–print (MSRI Archive on Diff. Geom. and Geom. Anal.): dg-ga/9409004.

[6] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras. Amer. math. Soc., RI, 1971.

Отдел математики,
Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН, Москва

Erwin Schrödinger Institut
für Mathematische Physik, Wien,
Österreich (Austria)