Une propriété de transfert en approximation diophantienne

Patrick BERNARD [1]

Janvier 2001

Introduction

0.1 Soit ω un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbb{T}^n$ le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$, et $t_\omega : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ le difféomorphisme $x \longmapsto x+\omega$. On s'intéresse au système dynamique discret engendré par t_ω. On dit que ω est résonant si il existe $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\langle \omega, k\rangle \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, le tore $\mathbb{T}^n$ est fibré en tores de plus petite dimension invariants par t_ω. Sinon, on dit que ω est non résonant, et t_ω est uniquement ergodique et minimal, c'est à dire que $\mathbb{T}^n$ est le seul compact non vide invariant par t_ω, et que la mesure de Haar est la seule mesure de probabilité invariante.

Il est très utile en théorie de la moyennisation (théorie KAM par exemple) de quantifier le caractère non résonant de ω. Le plus simple consiste à minorer les ¡¡petits diviseurs¿¿ $d(\langle k, \omega\rangle, \mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{Z}^n$. On parle alors de propriétés diophantiennes linéaires. Cette approche est assez naturelle, car les petits diviseurs apparaissent directement au dénominateur des coefficients des séries de perturbation dans de nombreux problèmes. Intuitivement, ceci revient a quantifier l'ergodicité de t_ω, mais le sens dynamique des petits diviseurs n'est pas très clair.

On peut aussi mesurer la qualité de l'approximation de ω par des vecteurs rationnels, c'est à dire estimer $d(T\omega, \mathbb{Z})$, $T \in \mathbb{Z}$. On parle alors de propriétés diophantiennes simultanées. Cette approche n'a été utilisée que beaucoup plus récemment dans les problèmes de moyennisation, voir [2], où elle permet une simplification remarquable du théorème de Nekhoroshev. On peut enfin se restreindre à la suite des meilleures approximations de ω, comme suggéré dans [2]. On définit pour ceci les périodes $T_i(\omega)$ de $\omega \in \mathbb{R}^n$ en posant $T_0(\omega) = 1$ et

$$T_{i+1}(\omega) = \min\big\{T \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|T\omega\|_{\mathbb{Z}} < \|T_i(\omega)\omega\|_{\mathbb{Z}}\big\}. \tag{1}$$

La croissance des périodes détermine de manière très condensées les propriétés diophantiennes de ω.

Un intérêt majeur de l'approximation simultanée est son caractère profondément dynamique. En effet, si l'on considère un homeomorphisme ϕ d'un espace métrique et une orbite récurrente $\phi^n(x)$ de cet homéomorphisme, on peut définir les écarts $d(\phi^n(x), x)$ et les périodes T_i de cette orbite par $T_0 = 1$ et

$$T_{i+1} = \min\big\{T \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(\phi^T(x), x) < d(\phi^{T_i}(x), x)\big\}.$$

Ces définition coincident avec les notions vues au dessus lorsque ϕ est la translation sur le tore de vecteur ω.

La correspondance précises entre les différents types de propriétés diophantienne n'est pas immédiate, bien que ces propriétés soient visiblement de même nature. Nous rappelons ici le très classique théorème de transfert de Khintchine, et l'étendons aux propriétés diophantiennes définies en terme de croissance des périodes, qui n'avaient pas été étudiées jusqu'ici. Cet

[1] Patrick Bernard, Institut Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hyères cedex, FRANCE. Patrick.Bernard@ujf-grenoble.fr

article doit beaucoup à mes conversations avec Pierre Lochak sur le lien entre les méthodes de perturbation par approximation simultanées développées dans [2] et la théorie KAM.

0.2 NOTATIONS : On utilise pour l'essentiel les notations de l'appendice 1 de [2]. Soit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$|\omega| = \sup_i |\omega_i|, \quad \|\omega\| = \sqrt{\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2}, \quad \|\omega\|_{\mathbb{Z}} = \min_{k \in \mathbb{Z}^n} |\omega - k|.$$

1 Théorèmes de Dirichlet

Il est utile pour fixer les idées de rappeler les deux résultats les plus simples de l'approximation diophantienne. On pourra consulter [3] pour les preuves.

1.1 THÉORÈME DE DIRICHLET : Considérons un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$, pour tout réel $Q > 0$, il existe un entier positif $T < Q$ tel que

$$\|T\omega\|_{\mathbb{Z}} \leqslant Q^{-\frac{1}{n}}.$$

En conséquence, si ω n'est pas rationnel, il existe une infinité d'entiers T tels que

$$\|T\omega\|_{\mathbb{Z}} < T^{-\frac{1}{n}}.$$

1.2 THÉORÈME : Considérons un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$, pour tout réel $Q > 0$ il existe un vecteur $k \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|k| < Q$ et tel que

$$\|\langle k, \omega \rangle\|_{\mathbb{Z}} \leqslant Q^{-n}.$$

En conséquence, si ω n'est pas résonant, il existe une infinité de vecteurs entiers k tels que

$$\|\langle k, \omega \rangle\|_{\mathbb{Z}} < |k|^{-n}.$$

1.3 PROPRIÉTÉ : La suite $T_i(\omega)$ des périodes de ω satisfait:

$$\frac{1}{2T_{i+1}(\omega)} \leqslant \|T_i\omega\|_{\mathbb{Z}} \leqslant \frac{1}{T_i(\omega)^{1/n}}.$$

L'inégalité de droite est une conséquence directe du théorème de Dirichlet. Pour montrer l'inégalité de gauche, considérons des vecteurs entiers w_i tels que

$$\|T_i(\omega)\omega\|_{\mathbb{Z}} = |T_i(\omega)\omega - w_i|.$$

On a alors,

$$\frac{1}{T_{i+1}T_i} \leqslant \left| \frac{w_{i+1}}{T_{i+1}} - \frac{w_i}{T_i} \right| \leqslant 2 \left| \frac{w_i}{T_i} - \omega \right| = \frac{2}{T_i} \|T_i\omega\|_{\mathbb{Z}}.$$

2 Propriétés de transfert

2.1 Rappelons que la suite $T_i(\omega)$ est la suite des périodes introduite dans l'introduction. On définit les ensembles

$$\begin{aligned}
\Omega_n(\tau) &= \left\{\omega \in \mathbb{R}^n / \ \exists C > 0, \forall T \in \mathbb{N}^*, \|T\omega\|_{\mathbb{Z}} \geqslant CT^{-(1+\tau)/n}\right\},\\
\Omega^n(\tau) &= \left\{\omega \in \mathbb{R}^n / \ \exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}^n - \{0\},\ \|\langle k, \omega\rangle\|_{\mathbb{Z}} \geqslant C|k|^{-(1+\tau)n}\right\},\\
\Omega(\tau) &= \left\{\omega \in \mathbb{R}^n / \ \exists C > 0, \forall i \in \mathbb{N},\ T_{i+1}(\omega) \leqslant CT_i(\omega)^{1+\tau}\right\},\\
\tilde{\Omega}(\tau) &= \{\omega \in \Omega(\tau) / \ \forall k \in \mathbb{N}^n - \{0\},\ \langle k, \omega\rangle \notin \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Au vu des théorèmes de Dirichlet de la section 1, les ensembles $\Omega^n(\tau)$ et $\Omega_n(\tau)$ sont vides pour $\tau < 0$, il en va évidemment de même des ensembles $\Omega(\tau)$ et $\tilde{\Omega}(\tau)$. On dit que les éléments de $\Omega^n(\tau)$ pour $\tau \geqslant 0$ satisfont une propriété diophantienne linéaire, et que les éléments de $\Omega_n(\tau)$ satisfont une propriété diophantienne simultanée. Dans cette note, on montre le

2.2 Théorème de transfert : Pour tout $\tau \geqslant 0$,

$$\Omega_n\left(\frac{\tau}{(n-1)\tau + n}\right) \subset \tilde{\Omega}\left(\frac{\tau}{(n-1)\tau + n}\right) \subset \Omega^n(\tau) \subset \Omega_n(n\tau).$$

On en déduit par exemple que toutes les notions de vecteurs mal approchables coincident:

$$\Omega_n(0) = \Omega^n(0) = \tilde{\Omega}(0).$$

Lorsque $n = 1$, ces nombres sont dits *de type constant.* On déduit aussi qu'une propriété diophantienne linéaire implique toujours une propriété diophantienne simultanée. Par contre l'appartenance à $\Omega_n(\tau)$ n'implique une propriété diophantienne linéaire que si $\tau < (n-1)^{-1}$. L'existence de ce seuil sera expliquée dans la section 3.

2.3 Mentionnons que les inclusions suivantes, dues à Khintchine, sont bien connues depuis longtemps (voir [2], [3]): Pour tout $\tau \geqslant 0$,

$$\Omega_n\left(\frac{\tau}{(n-1)\tau + n}\right) \subset \Omega^n(\tau) \subset \Omega_n(n\tau).$$

2.4 La section suivante est consacrée à quelques discussions sur le théorème de transfert. On y réduit la preuve des deux nouvelles inclusions à celle la propriété 3.7.

3 Vecteurs rationnels et résonances

3.1 Le module de résonance de ω, $R(\omega)$, est l'ensemble des vecteurs $k \in \mathbb{Z}^n$ pour lesquels $\langle k, \omega\rangle \in \mathbb{Z}$. On appelle ordre de résonance de ω le rang de ce sous groupe de $\mathbb{Z}^n$, c'est à dire le cardinal de ses bases. Le vecteur ω est dit résonant si son module de résonance n'est pas trivial, c'est à dire si son ordre de résonance est non nul.

3.2 Le vecteur ω est dit rationnel si ses composantes sont rationnelles. Le vecteur ω est rationnel si et seulement si toutes les orbites des t_ω sont périodiques. Elles ont alors toutes la même période, qui est le plus petit dénominateur commun des composantes de ω. Les vecteurs rationnels sont les vecteurs maximalement résonants, c'est à dire ceux dont l'ordre de résonance est n. En effet, tout module R de rang n contient le module $T\mathbb{Z}^n$ pour une certain T. Les vecteurs ayant R pour module de résonance sont donc nécessairement T-périodiques.

3.3 PROPOSITION : Soit ω un vecteur résonant d'ordre r. Il existe une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$ et une famille q_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ d'entiers tels que d_i divise d_{i+1} et tels que

$$(d_1 e_1, \dots, d_r e_r)$$

forme une base du module de résonance de $A\omega$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base standard de $\mathbb{R}^n$. En particulier,

$$A\omega = (w/T, \omega') \in \mathbb{Q}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

où ω' est un vecteur non résonant et w/T est un vecteur périodique (rationnel) de période $T = d_r$. Lorsque ω est périodique, on lui associe dont n invariants d_i, où $d_n = T$ est la période. Il existe alors une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$A\omega = (a_1/d_1, a_2/d_2, \dots, a_n/d_n)$$

avec des composantes a_i/d_i irréductibles.

3.4 DÉMONSTRATION : Soit R le module de résonance de ω. Considérons une base $k_1, \dots, k_r$ de R, et associons lui la matrice B à coefficients entiers de l'application linéaire $\mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow (\langle k_i, x\rangle) \in \mathbb{R}^r$. Par un résultat classique, voir [1], théorème 3.8, il existe une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$, une matrice $C \in Gl_r(\mathbb{Z})$ et une matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 & 0 & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & d_r & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

telle que $B = C\Lambda A$, où les coefficients diagonaux d_i sont des entiers tels que d_i divide d_{i+1}. La propostion en découle puisque

$$\langle k, A\omega\rangle \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \langle A^t k, \omega\rangle \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow A^t k \in \mathrm{Im}(B^t) = \mathrm{Im}(A^t\Lambda^t) \Longleftrightarrow k \in \mathrm{Im}(\Lambda^t).$$

3.5 Il peut être difficile de distinguer un vecteur rationnel de grande période d'un vecteur non rationnel, et même d'un vecteur non résonant. Peut-on réellement savoir, par exemple, si les périodes des planètes du système solaire sont incommensurables, ou si elles forment un vecteur rationnel dont la période est de l'ordre de la durée de vie du système solaire. Le premier invariant d_1 apporte une bonne mesure de la présence effective ou non de résonances pour un vecteur périodique ω. Considérons pour illustrer ce fait un vecteur réel ω est une suite d'approximations rationnelles w_n/T_n de ω, où la période T_n tend vers l'infini. Il n'est pas difficile de voir que la limite ω est résonante si et seulement si la suite $d_1(w_n/T_n)$ est bornée : Le caractère résonant d'un vecteur se lit sur les premiers invariants de ses approximations rationnelles.

En ne retenant d'un vecteur rationnel que sa période T, on perd donc une information essentielle. Par exemple, la suite des distances $\|T(\omega, 0)\|_{\mathbb{Z}}$, $T \in \mathbb{Z}$, associée au vecteur $(\omega, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est la même que la suite $\|T\omega\|_{\mathbb{Z}}$ associée à ω, alors que le vecteur $(\omega, 0)$ est fortement résonant et engendre des orbites très mal réparties dans $\mathbb{Z}^{n+1}$. De la même façon, la suite des périodes $T_i(\omega, 0)$ est la même que celle de ω. Il est remarquable qu'une simple connaissance de la suite $\|T\omega\|_{\mathbb{Z}}$ puisse suffire à déterminer le caractère non résonant de ω, voire 3.6. Il n'est pas possible de tirer ce caractère non résonant d'une connaissance de la suite des périodes. Pourtant, si l'on suppose à priori le vecteur ω non résonant, on montre que certaines estimées sur la croissance des périodes permettent de déduire des propriétés diophantiennes linéaires vérifiées par ω. Cette remarque, à ma connaissance nouvelle, fait l'objet de la proposition 3.7, qui sera démontrée dans la section suivante.

3.6 PROPRIÉTÉ : Pour tout $\tau < (n-1)^{-1}$, les vecteurs de $\Omega_n(\tau)$ sont non résonants.
Ce résultat est bien sur impliqué par les inclusions de Khintchine 2.3. Nous allons cependant en donner une preuve élémentaire. Considérons un vecteur résonant ω. D'après 3.3, il existe une matrice $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ telle que $A\omega = (\omega', w/p) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Q}$, $(w,p) \in \mathbb{Z}^2$. Appliquons le théorème de Dirichlet à $p\omega'$. Il existe une infinité d'entiers T tels que $\|Tp\omega'\|_{\mathbb{Z}} \leqslant T^{-1/n}$, et donc tels que

$$\|T(p\omega', w)\|_{\mathbb{Z}} \leqslant \frac{1}{T^{-1/(n-1)}} \Longleftrightarrow \|TpA\omega\|_{\mathbb{Z}} \leqslant \frac{p^{1/(n-1)}}{(pT)^{1/(n-1)}}.$$

Il y a donc une infinité d'entiers $T' = pT$ et une constante C tels que

$$\|T'\omega\|_{\mathbb{Z}} \leqslant \frac{C}{(T')^{1/(n-1)}}.$$

Ceci exclut que ω puisse appartenir à l'ensemble $\Omega_n(\tau)$ lorsque

$$\frac{1+\tau}{n} < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \tau < \frac{1}{n-1}.$$

3.7 PROPOSITION : Si ω est non résonant et si il existe $\tau \in \left[0, \frac{1}{n-1}\right[$ et $C > 0$ tels que $T_{i+1} \leqslant CT_i^{1+\tau}$ alors il y a une constante $D > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$\|\langle k, \omega\rangle\|_{\mathbb{Z}} \geqslant D|k|^{-\frac{1+\mu}{n}}, \quad \text{où} \quad \mu = \frac{n\tau}{n-(n-1)(1+\tau)}.$$

3.8 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TRANSFERT : Nous ne prouverons que les deux première inclusions. Nous renvoyons à [3] pour la preuve de la troisième inclusion. La deuxième inclusion découle directement de la propriété 3.7. La première inclusion découle de la propriété 3.6 et de la remarque suivante : Si $\omega \in \Omega_n(\tau)$, on obtient par le théorème de Dirichlet que

$$T_i^{-(1+\tau)/n} \leqslant \|T_i\omega\|_{\mathbb{Z}} \leqslant T_{i+1}^{-1/n},$$

et donc que $\omega \in \Omega(\tau)$ (voir [2]).

4 DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.7

On considère une suite de meilleures approximations ω_i, c'est à dire une suite de vecteurs rationnels telle que $\|T_i(\omega_i - \omega)\| = \|T_i\omega\|_{\mathbb{Z}}$ et $T_i\omega_i = w_i \in \mathbb{Z}^n$. Soit $k \in \mathbb{Z}^n$, comme ω est non résonant, les produits scalaires $\langle k, \omega_i\rangle$ ne peuvent être entiers que pour un nombre fini de valeurs de i, et on peut définir

$$i(k) = 1 + \max\{i \text{ tel que } \langle k, \omega_i\rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

4.1 Établissons pour commencer les inégalités

$$\|k\| \geqslant \frac{T_{i(k)-1}}{2\sqrt{n}\, T_{i(k)}^{1-1/n}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}}} T_{i(k)}^{\frac{n+(1-n)(1+\tau)}{n(1+\tau)}}.$$

On a

$$\langle k, \omega_{i(k)-1} \rangle \in \mathbb{Z},$$

et

$$\|\langle k, \omega_{i(k)} \rangle\|_{\mathbb{Z}} \geqslant 1/T_{i(k)}$$

donc

$$|\langle k, \omega_{i(k)} - \omega_{i(k)-1} \rangle| \geqslant 1/T_{i(k)}.$$

On en déduit que

$$\|k\| \geqslant \frac{1}{2T_{i(k)} \|\omega_{i(k)-1} - \omega\|},$$

on obtient la premiere inégalité en remarquant que, par le théorème de Dirichlet,

$$\|\omega_{i(k)-1} - \omega\| \leqslant \sqrt{n} |\omega_{i(k)-1} - \omega| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{T_{i(k)-1} T_{i(k)}^{1/n}}.$$

La seconde inéqualité est alors une conséquence directe de l'hypothèse.

4.2 Un calcul simple donne alors que

$$T_{i(k)} \leqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}} \|k\|\right)^{n(1+\mu)},$$

où μ est donné dans l'énoncé. Définissons l'indice

$$j(k) = \min\left\{ j \geqslant i(k) \text{ tels que } T_{j+1} \geqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}} \|k\|\right)^{n(1+\mu)} \right\}.$$

D'un coté, l'inégalité

$$T_{j(k)+1} \geqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}} \|k\|\right)^{n(1+\mu)}$$

implique, puisque $T_{j(k)+1} \leqslant C T_{j(k)}^{1+\tau}$, que

$$T_{j(k)} \geqslant \frac{\left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}}\right)^{n\frac{1+\mu}{1+\tau}}}{C^{\frac{1}{1+\tau}}} \|k\|^{n\frac{1+\mu}{1+\tau}}.$$

D'un autre coté, on a la majoration

$$T_{j(k)} \leqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}} \|k\|\right)^{n(1+\mu)}.$$

On a donc, comme $j(k) \geqslant i(k)$,

$$\|\langle k, \omega_{j(k)} \rangle\|_{\mathbb{Z}} \geqslant \frac{1}{T_{j(k)}} \geqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}} \|k\|\right)^{-n(1+\mu)}. \tag{2}$$

En utilisant encore le théorème de Dirichlet, on obtient

$$|\omega_{j(k)} - \omega| \leqslant \frac{1}{T_{j(k)}^{1+1/n}}$$

et donc

$$|\langle k, \omega_{j(k)} - \omega\rangle| \leqslant \frac{\|k\|}{T_{j(k)}^{1+1/n}} \leqslant \frac{1}{T_{j(k)}}\tilde{C}\|k\|^{\frac{\tau-\mu}{1+\tau}}, \tag{3}$$

où $\tilde{C}$ ne dépend pas de k. Il est facile de voir que $\tau < \mu$, et donc, par (2) et (3) que

$$\|\langle k, \omega\rangle\|_{\mathbb{Z}} \geqslant \frac{1}{T_{j(k)}}(1 - \epsilon(\|k\|)) \geqslant \left(2\sqrt{n}\, C^{\frac{1}{1+\tau}}\|k\|\right)^{-n(1+\mu)}(1 - \epsilon(\|k\|)),$$

où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. La proposition annoncée en découle.

References

[1] Jacobson : *Basic Algebra I*, Freeman.

[2] Lochak P. : Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russ. Math. Surveys **47** (1992) 57-133.

[3] Schmidt W. M. : *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. **785** (1980).